Notions

B. Maury
S. Faure
Laboratoire de Mathématiques d’Orsay, Université Paris-Saclay
& Ecole des Mines Paristech

Vocabulaire « sensible »

Ensemble

Structure

Espace

Métrique

Espace métrique

Distance

Espace mesuré

Fermé

Mesure

Densité

Frontière

Ouvert

Compact

Centre

Spatialités

(Multi-) fractal

Uniforme

Diffusion

Naturel

Forme

Moral

Vocabulaire sensible

Ensemble

Structure

Espace

Métrique

Espace métrique

Distance

Espace mesuré

Fermé

Mesure

Densité

Frontière

Compact

Ouvert

Centre

Spatialités

(Multi-) fractal

Uniforme

Diffusion

Naturel

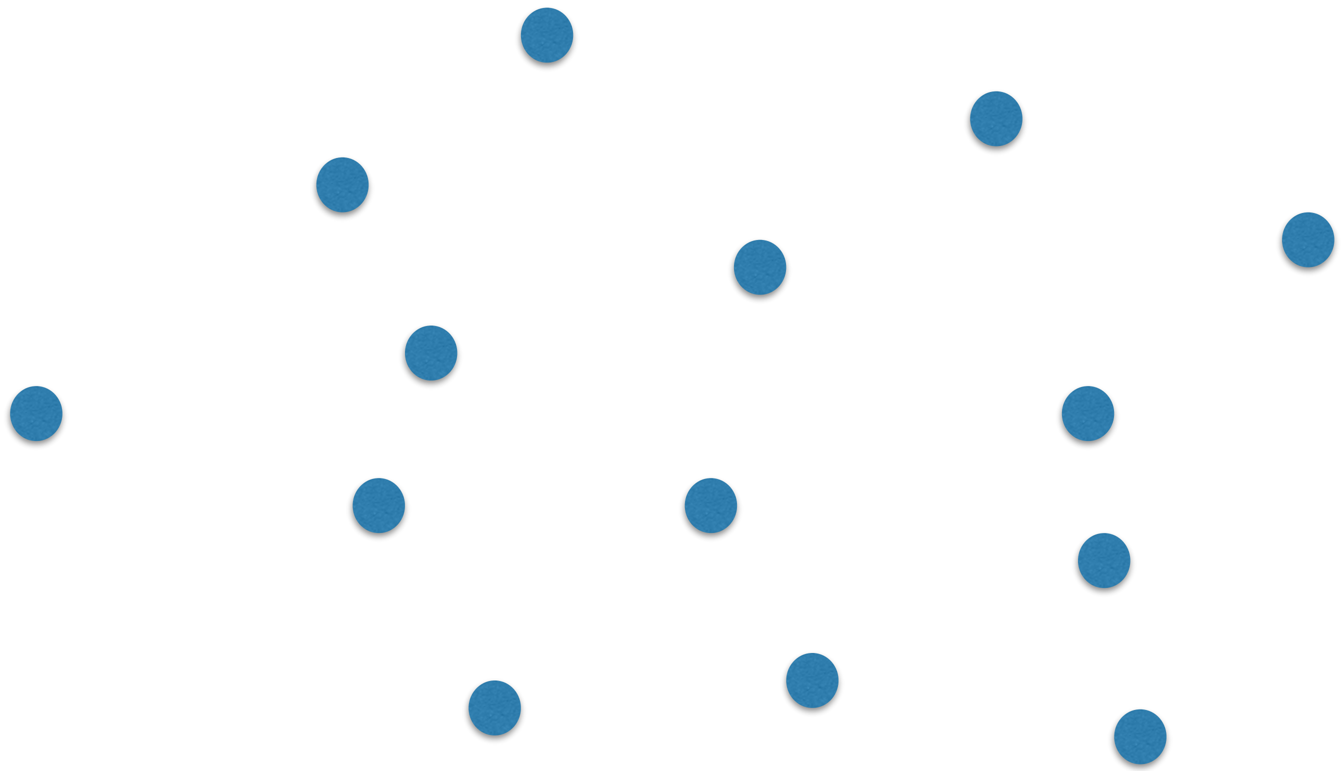
Forme

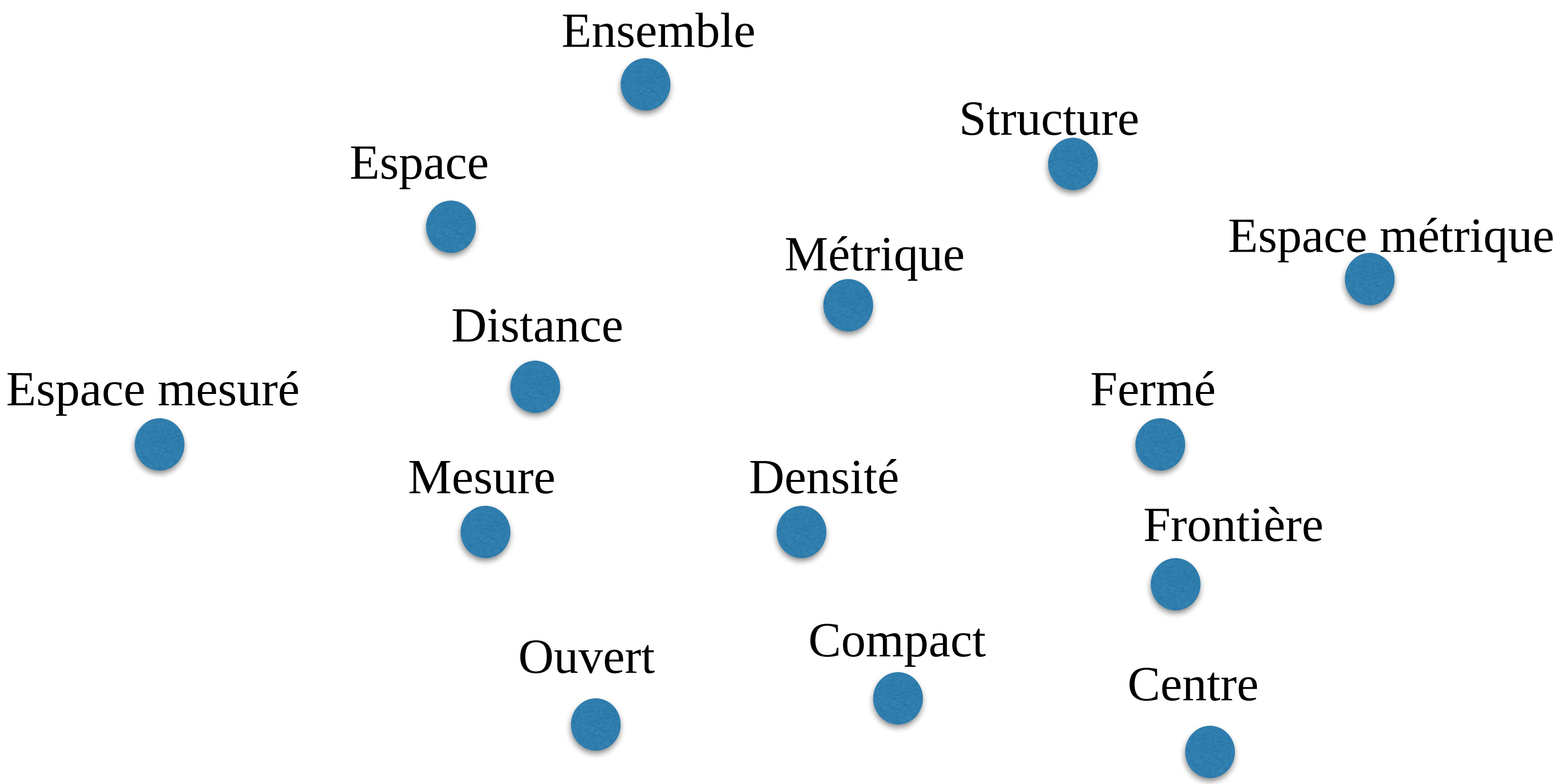
Moral

Ensemble

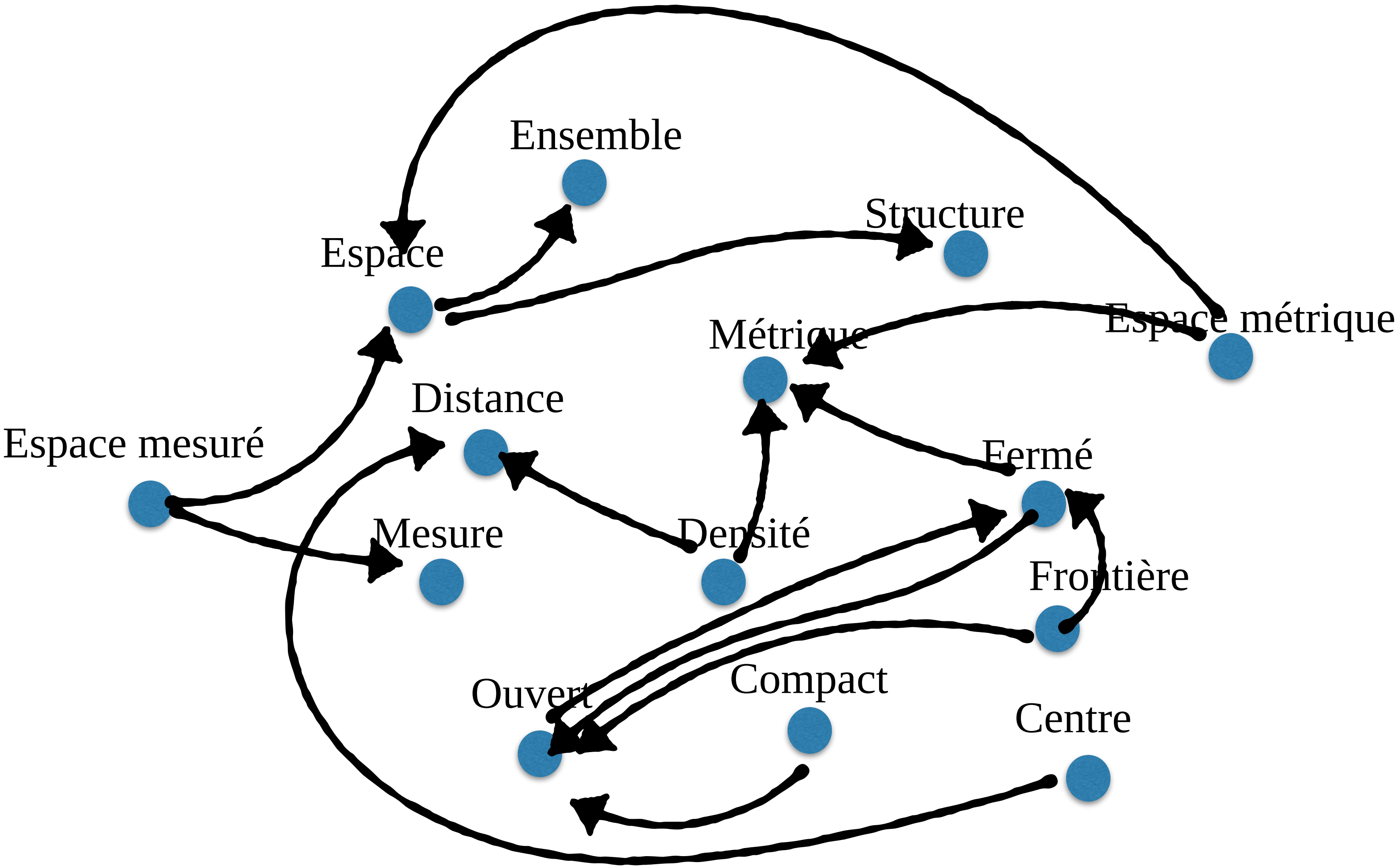
Notions fondamentales

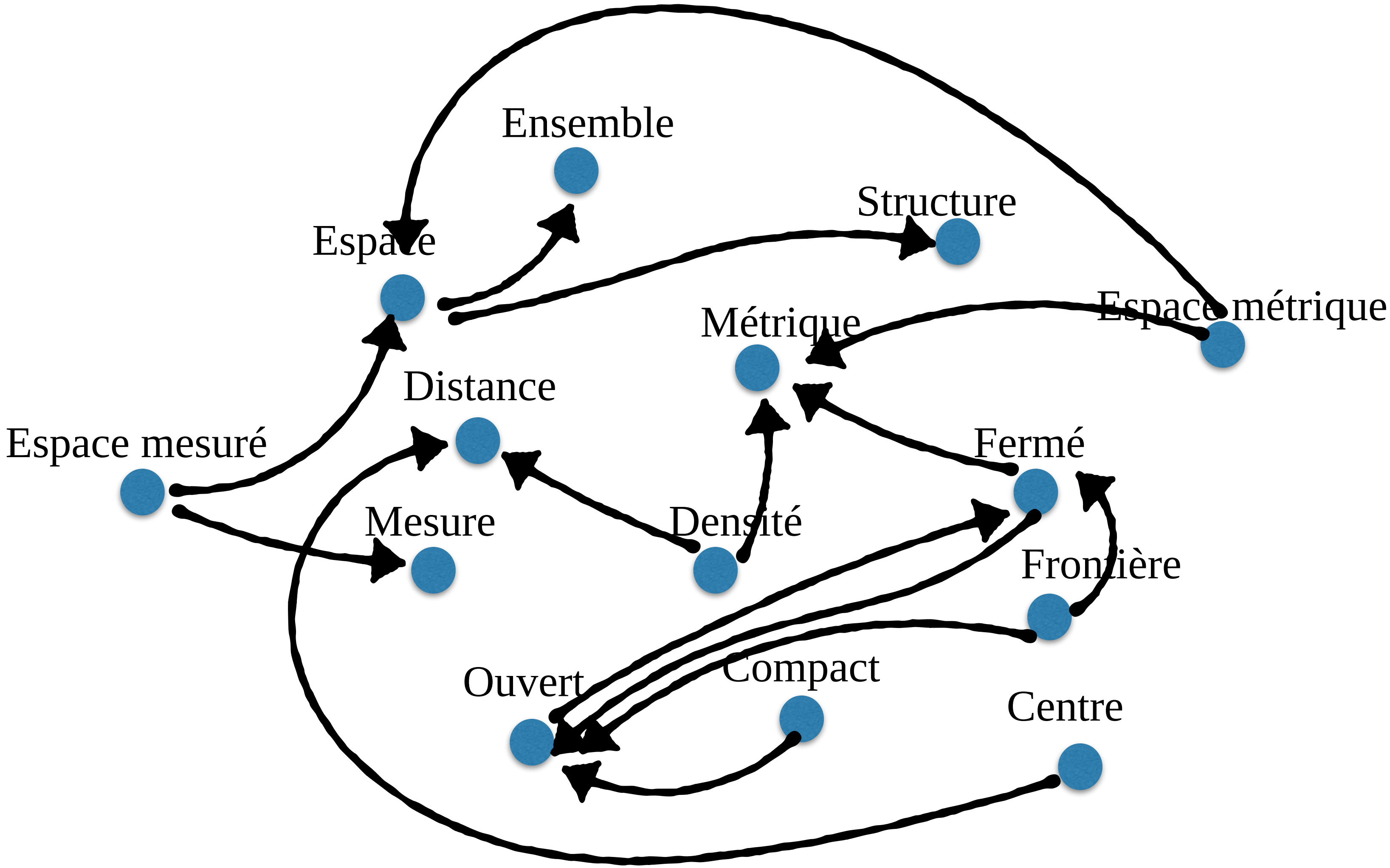
Ensemble




Ensemble
Structure
Espace
Métrique
Espace métrique
Distance
Espace mesuré
Fermé
Mesure
Densité
Frontière
Ouvert
Compact
Centre

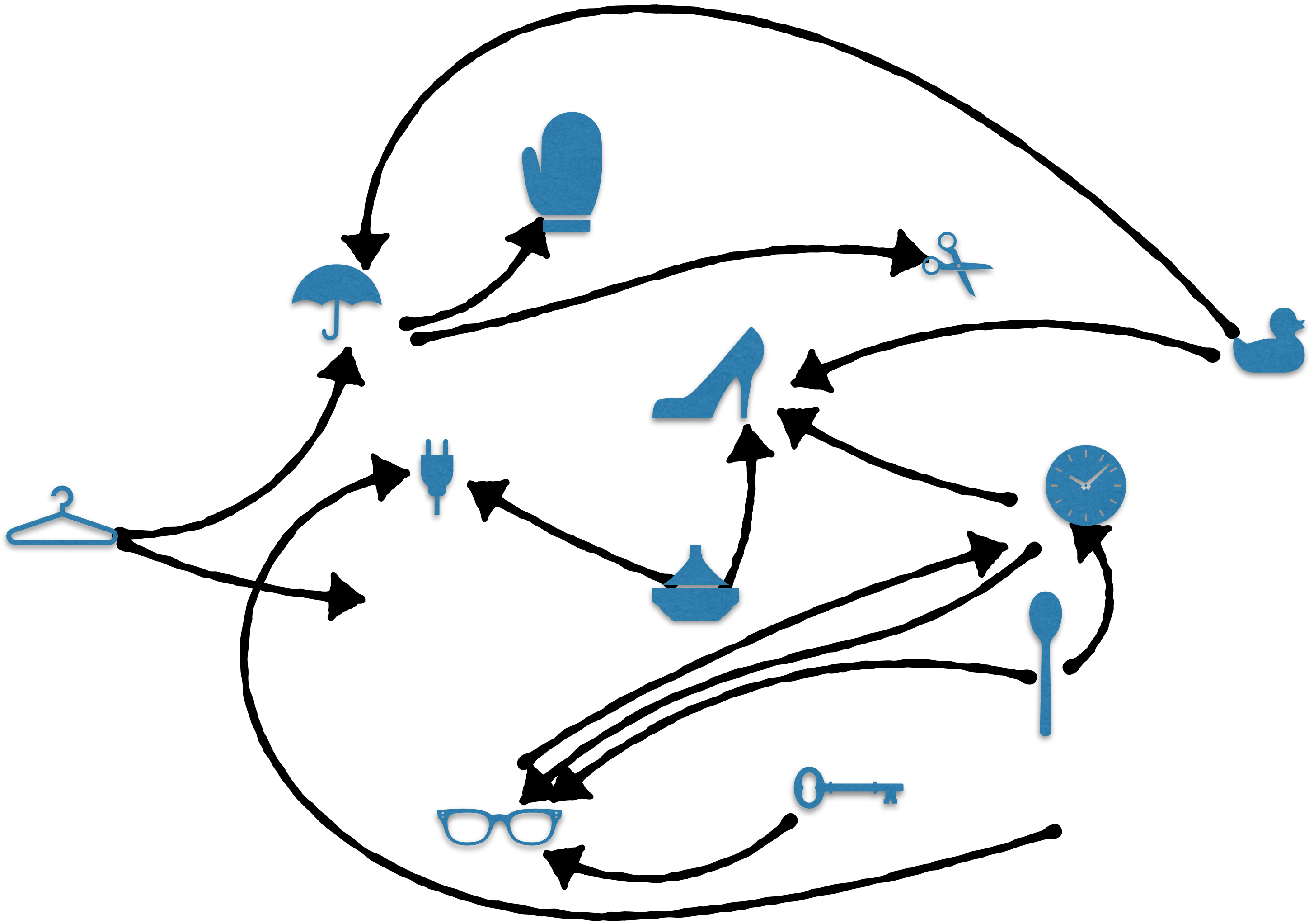
Structure la plus primitive : relation



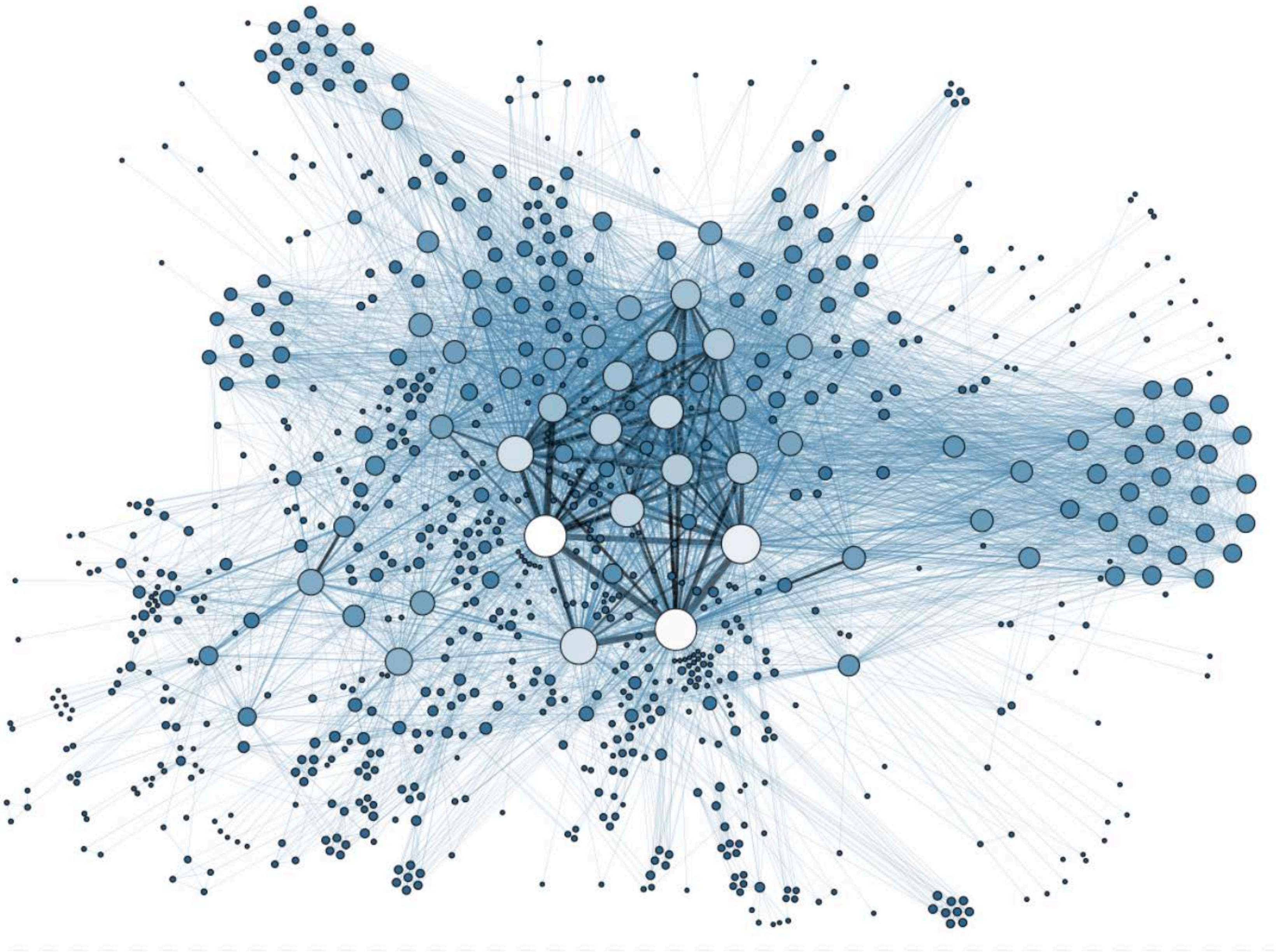


Les éléments n'ont de sens que par les relations qu'ils entretiennent entre eux

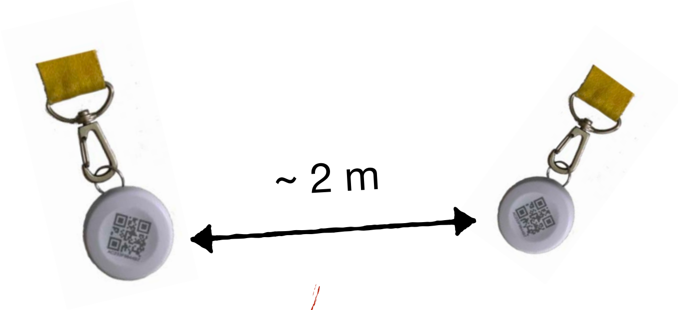
Même structure sur un ensemble différent



Réseaux sociaux (relation symétrique)
Structurant un ensemble d’individus

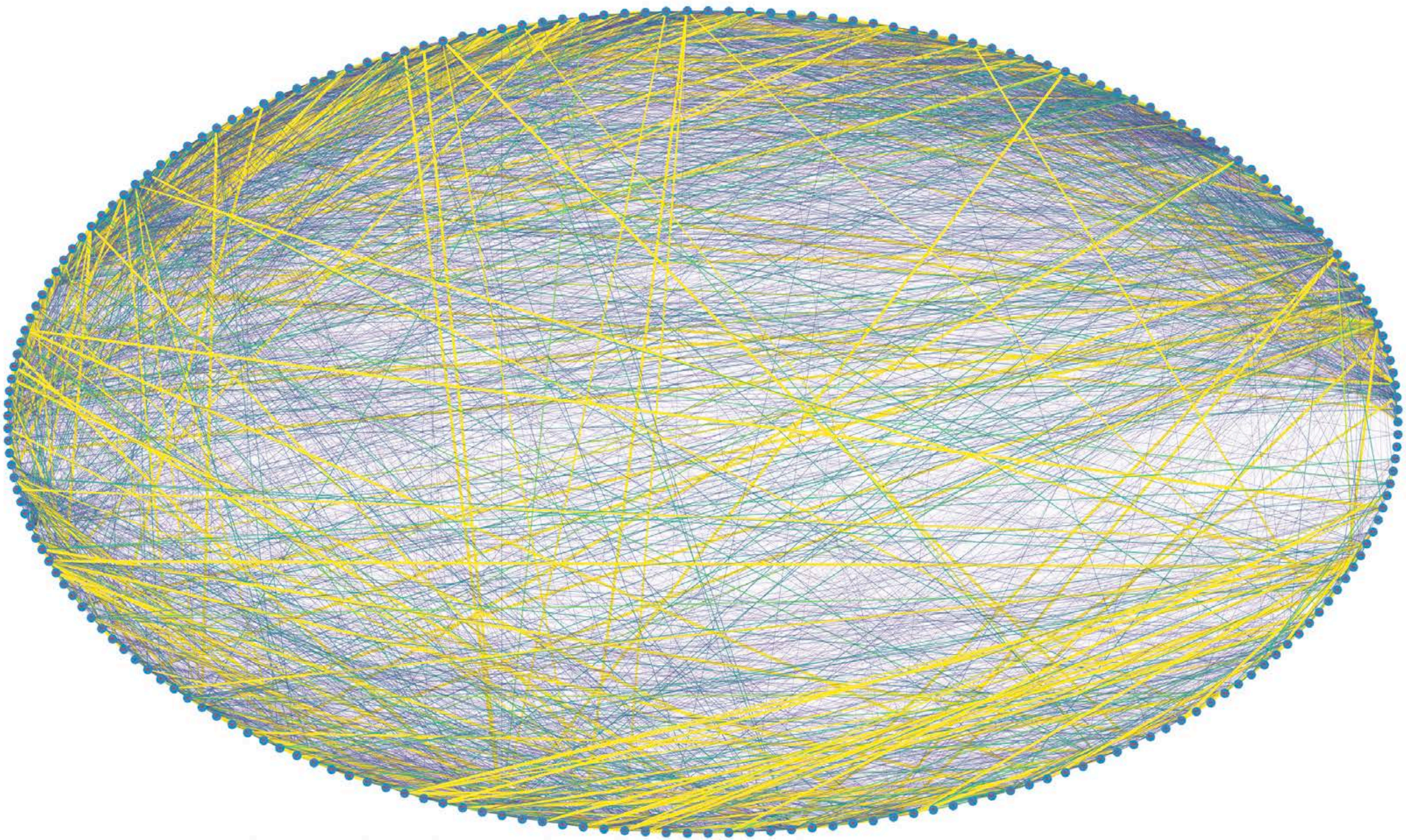


Mesure effective des contacts entre étudiants en médecine au Kremlin-Bicêtre
à l'aide de petits capteurs (prêtés par l'entreprise kerlink) portés par les volontaires

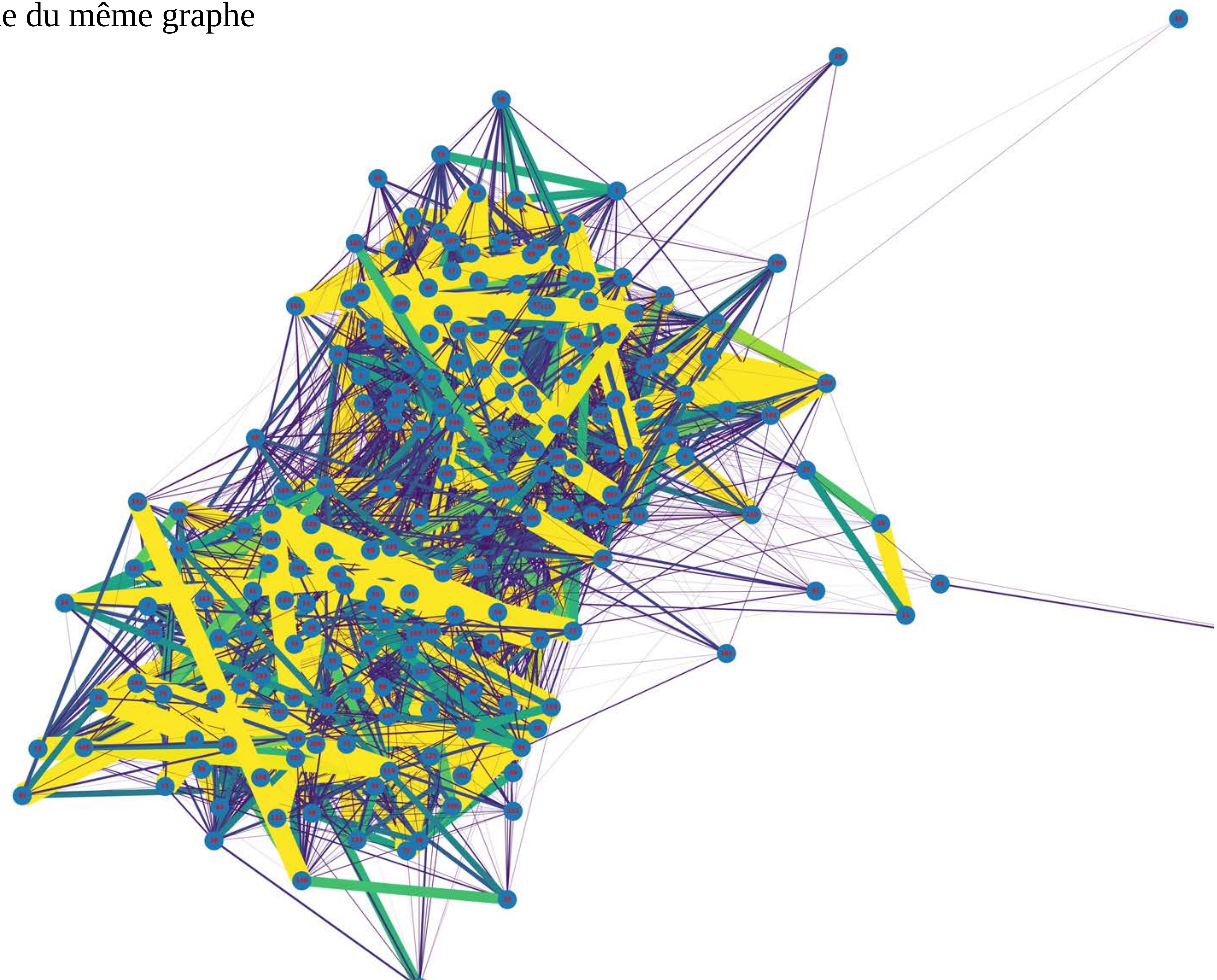


	id1	id2	date1	date2
0	CC233F66897D	FC233F86221A	2020-08-31 15:51:56.977000	2020-08-31 16:10:56.977000
1	FC233F86221A	BCC33F66543B	2020-08-31 15:49:56.977000	2020-08-31 16:11:56.977000
2	BCC33F66543B	AC233F0985A3	2020-08-31 15:47:56.977000	2020-08-31 15:55:56.977000
3	...	...	...	...

Le graphe des contacts



Autre vue du même graphe



Notion de *mesure*

$$A \subset X \longmapsto \mu(A) \geq 0$$

Formalise la notion intuitive de quantité sommable (variable extensive)

$$\mu(\text{rien}) = 0$$

Si A et B sont disjoints $\quad \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$

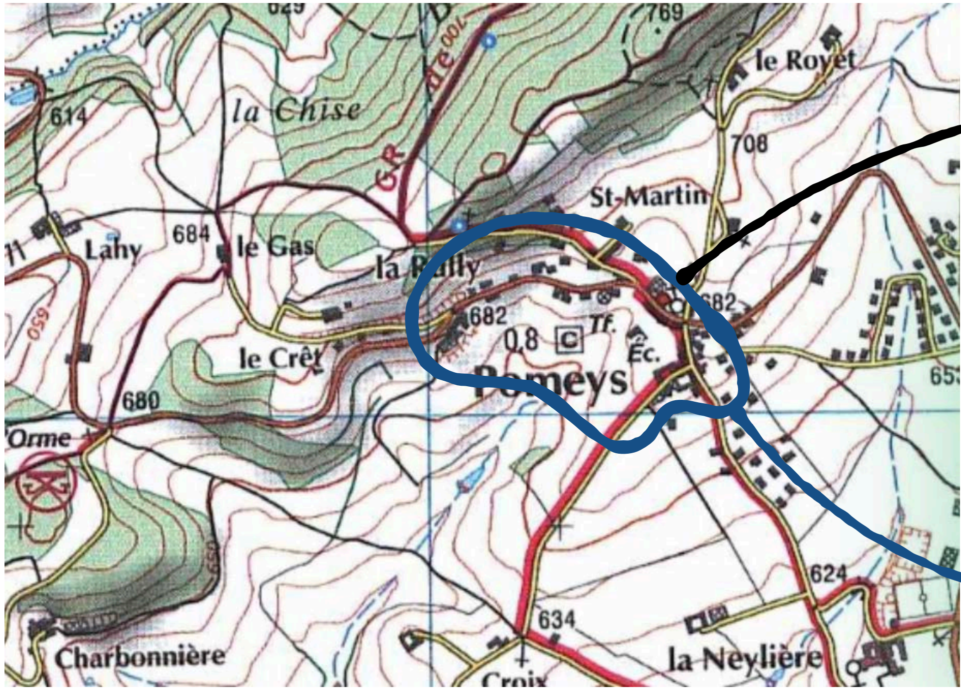
Dans l’approche de modélisation : 2 types de mesure

- Type « volume » , comme la mesure d’aire sur une zone géographique, qui tapisse l’espace de façon statique, immuable

- Type « masse », afférente à des entités (grains, molécules, individus, centres hospitaliers, …)

Ensemble ainsi structuré

Notion de *mesure*



1,7 km2

467 résidents

Densité d’une mesure relativement à une autre

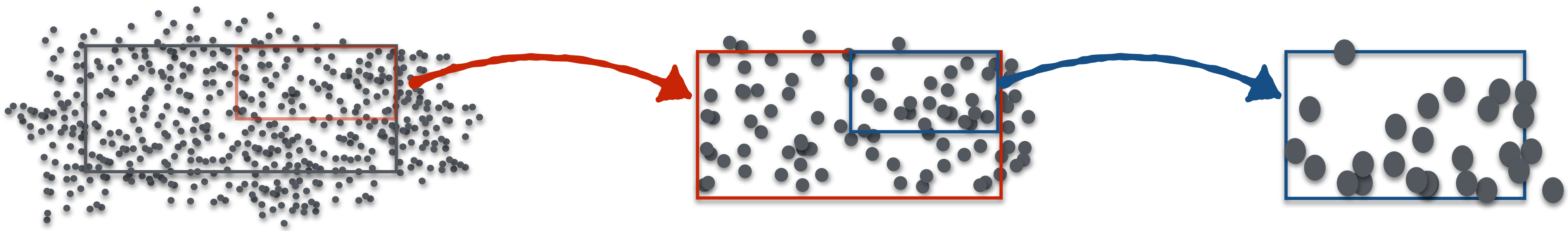
Théorème de Radon-Nykodym-Lebesgue: sous certaines hypothèses, on peut définir la *densité* d’une mesure relativement à une autre.

Sous-entendu: à *n’importe quelle échelle*, aussi petite soit-elle. Il s’agit d’une idéalisation, qui ne correspond à aucune réalité physique.

Principe de construction: on définit la densité sur des boules de plus en plus petites.
Stationnarité : cette densité se **stabilise** à une certaine valeur pour des boules assez petites

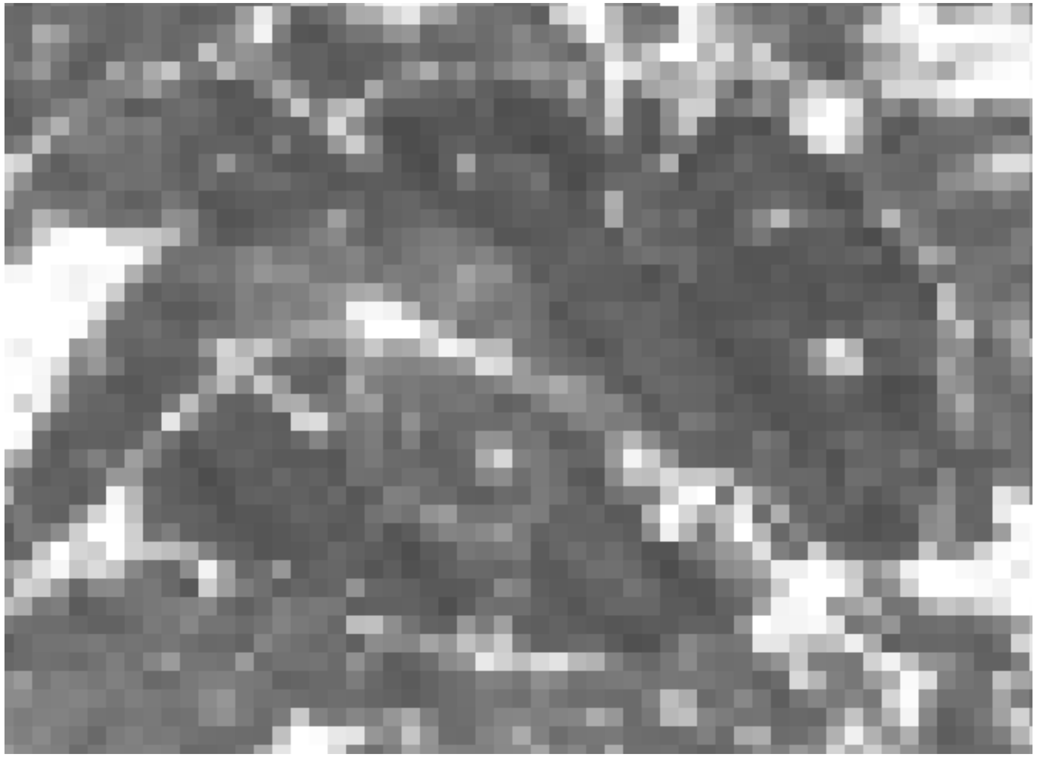
Paradoxalement, cette démarche permet de simplifier la description de la matière, en s’affranchissant de la notion d’échelle

En « pratique », même en physique, une densité n’est définie qu’au dessus d’une certain échelle



Notion de *volume élémentaire représentatif* : volume petit par rapport à la taille du domaine observé.

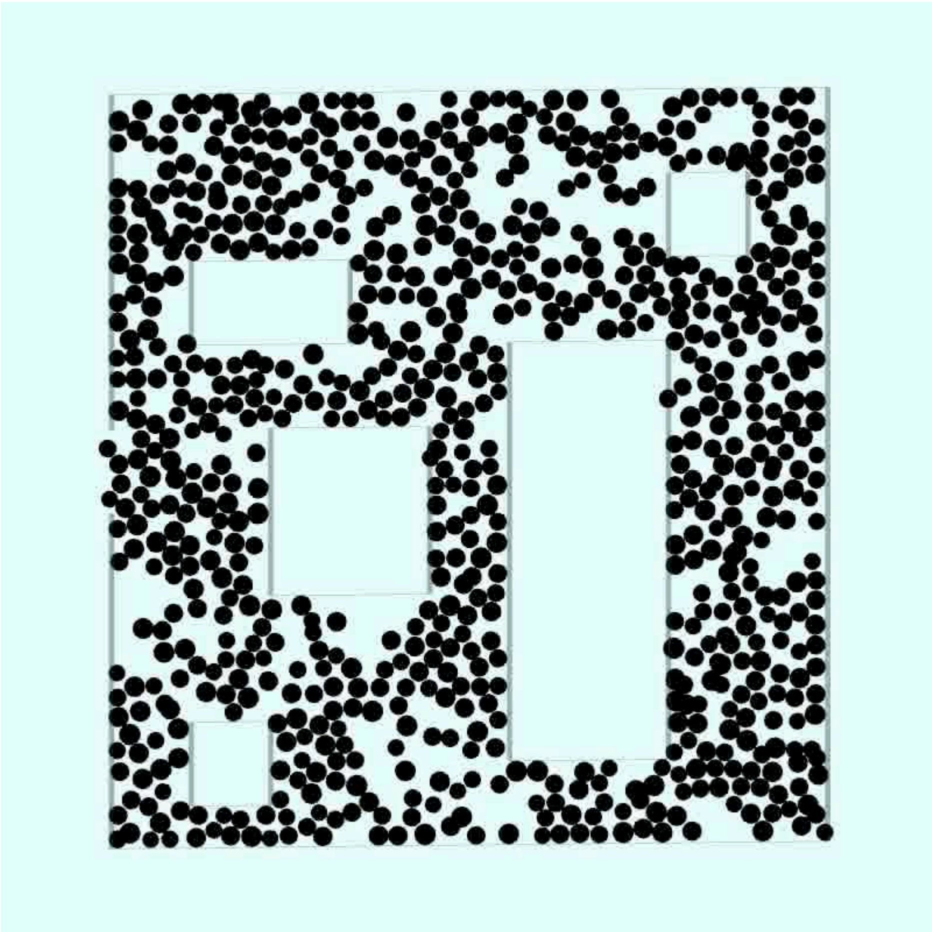
Densité de population

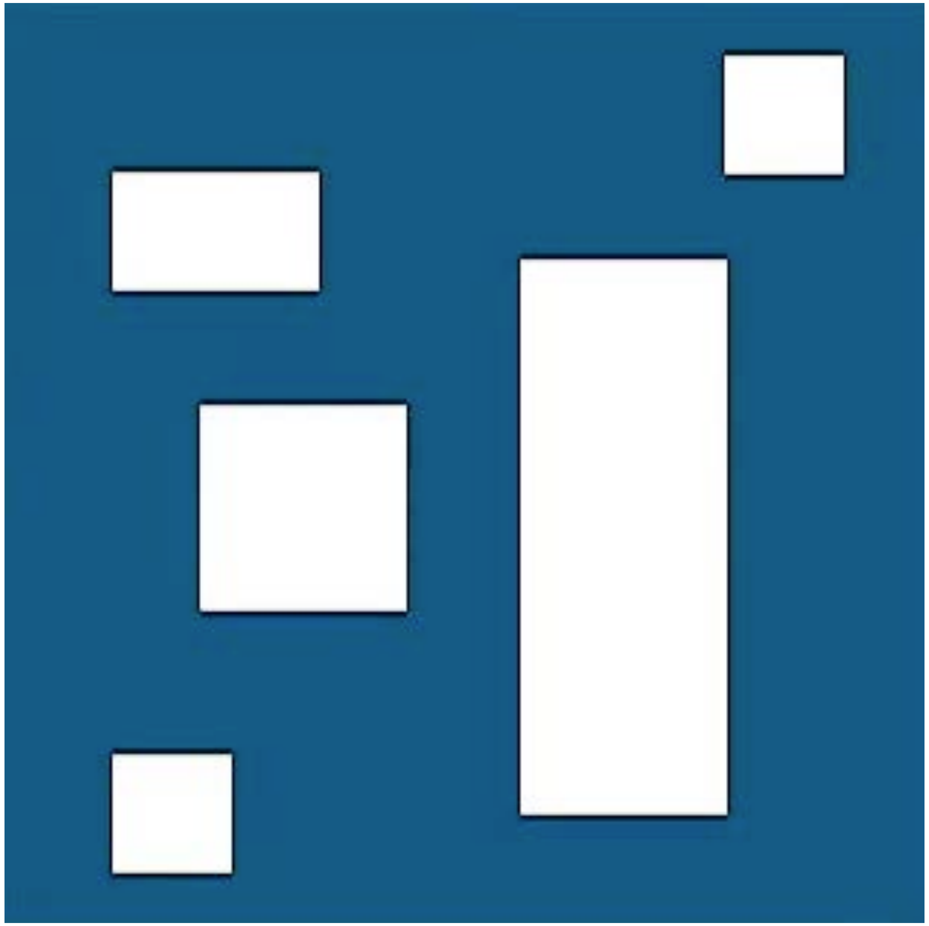


Pas de stabilisation: la densité « mathématique » (même avec beaucoup de bonne volonté) n’est pas définie: elle prend des valeurs différentes selon l’échelle.

Volume (bi-dimensionnel) élémentaire représentatif sum = 603.1

Exemple de modélisation macroscopique d'une réalité granulaire





Notion de *distance*

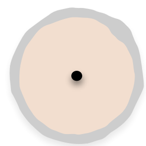
Sur un ensemble X, on définit une *distance* comme une application qui à tout couple (x_1,x_2) associe un nombre réel positif ou nul, noté $d(x_1,x_2)$.
Pour mériter le nom de distance, cette application doit vérifier les 3 propriétés suivantes

1) Séparation : $d(x_1,x_2) = 0$ si et seulement si $x_1 = x_2$

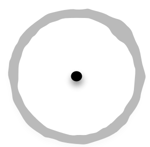
2) Symétrie : $d(x_1,x_2)=d(x_2,x_1)$

3) Inégalité triangulaire : $d(x_1,x_2) \leq d(x_1,x_3) + d(x_3,x_2)$

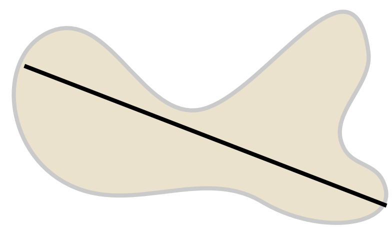
Boule $$\overline{B}(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) \leq r\}$$



Sphère $$S(x,r) = \{y \in X,\ d(x,y) = r\}$$

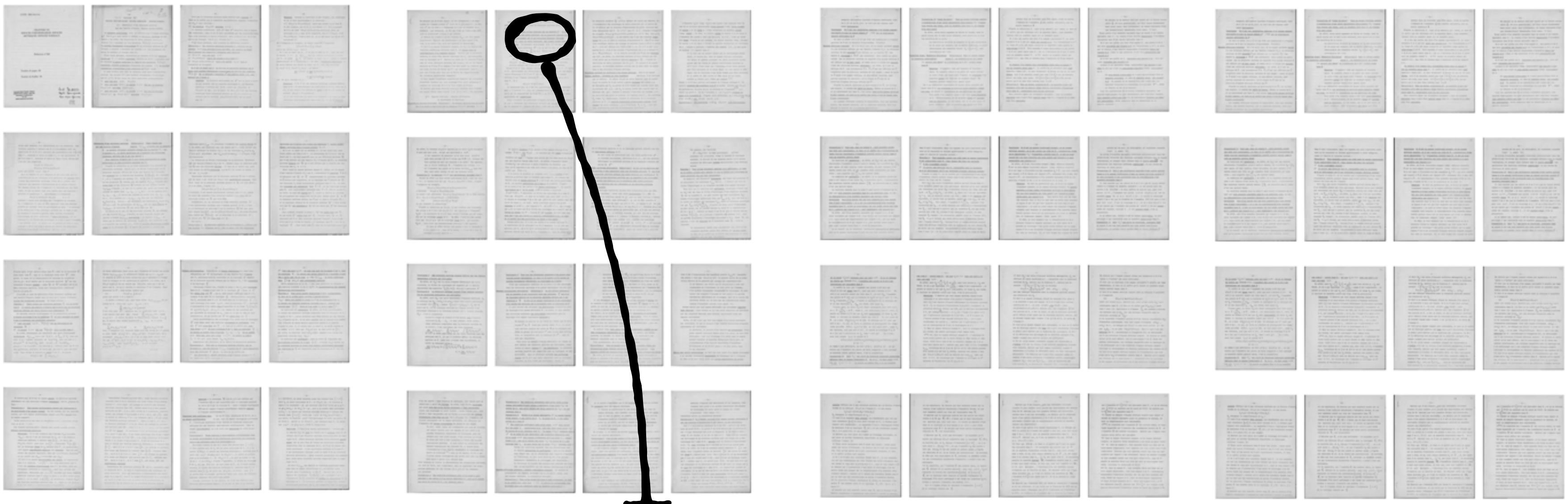


Diamètre $$\mathrm{diam}(E) = \sup_{x,y \in E} d(x,y)$$



Espace métrique : ensemble X muni d'une distance $d(\bullet,\bullet)$
On peut écrire des milliers de pages à partir de cette simple définition, sans se préoccuper du moindre lien avec le monde « sensible »

CHAPITRE VII
ESPACES UNIFORMISABLES. ESPACE
METRIQUES. ESPACES NORMAUX

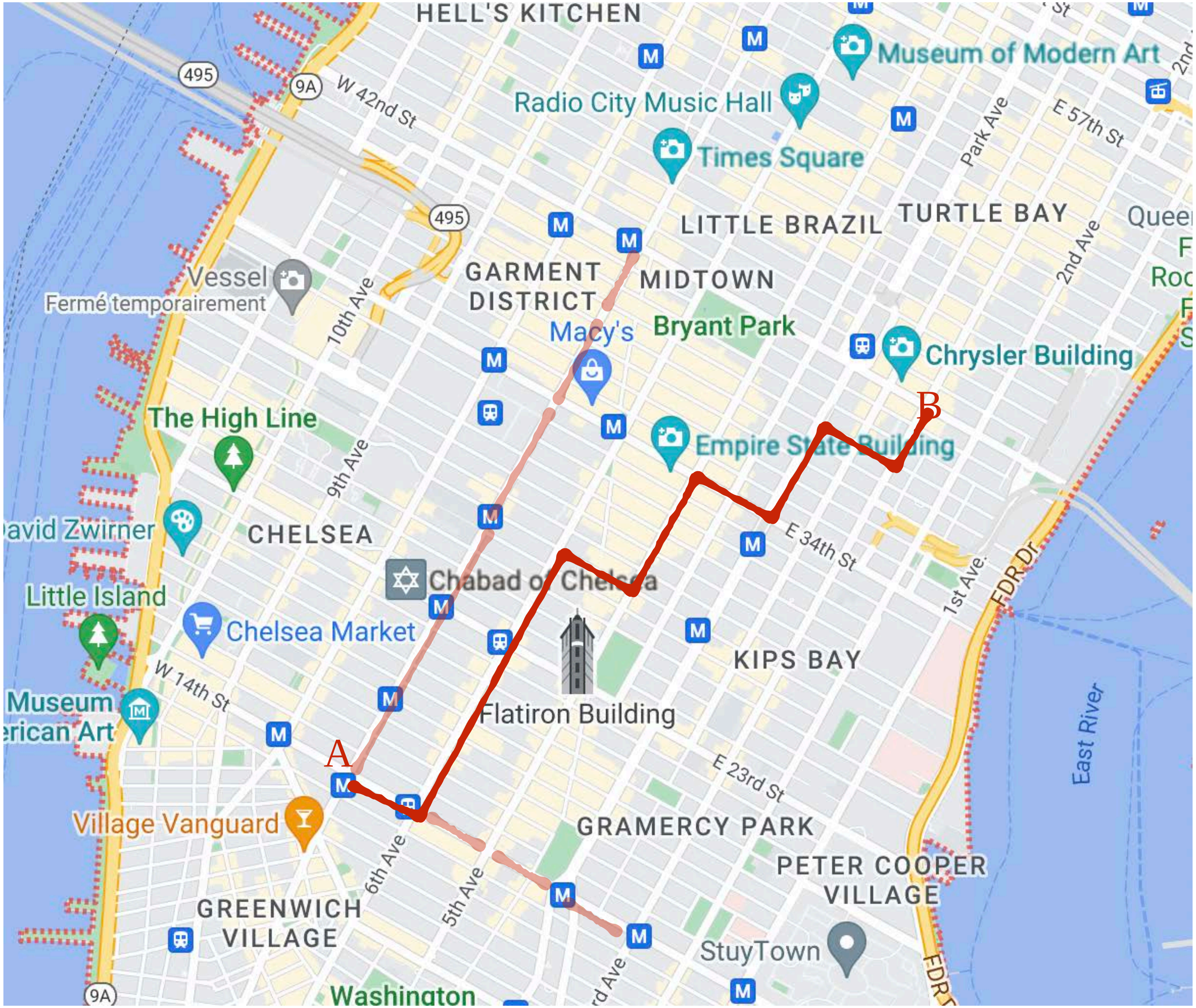


__Exemples.__ La distance euclidienne $d(x,y)$ est une métrique sur l'espace numérique R^n ; il en est de même des fonctions $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |x_i - y_i|$, et $\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$. Toutes ces métriques définissent sur R^n la structure uniforme produit définie au ch.V .

Espace métrique : ensemble X muni d’une distance $d(\bullet,\bullet)$

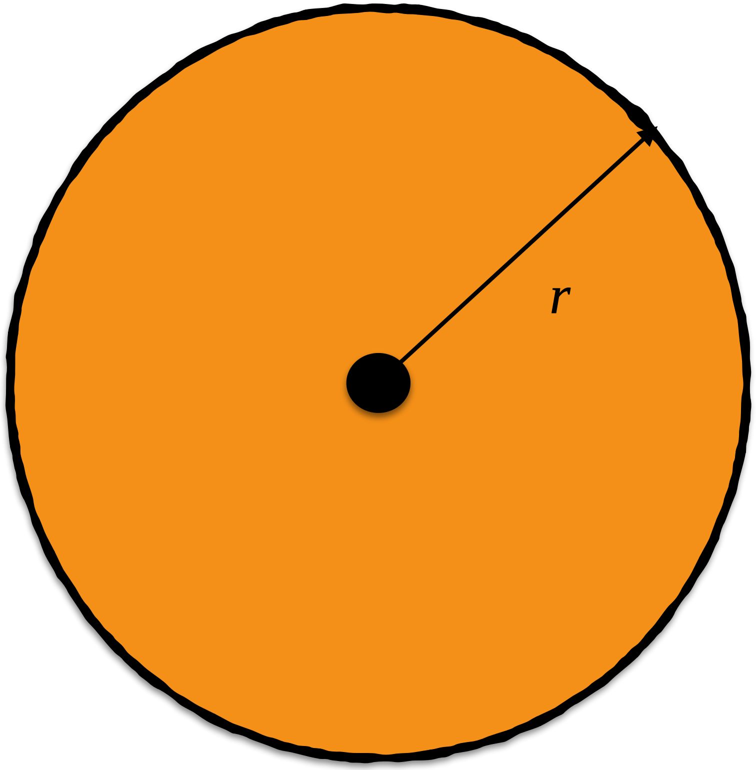
Espaces de longueur : espace dans lequel on peut définir des courbes entre 2 points, estimer leurs longueurs, les concaténer. La distance est définie comme la longueur d’un plus court chemin qui les relie (pas forcément unique)

Distance de Manhattan (non euclidienne)

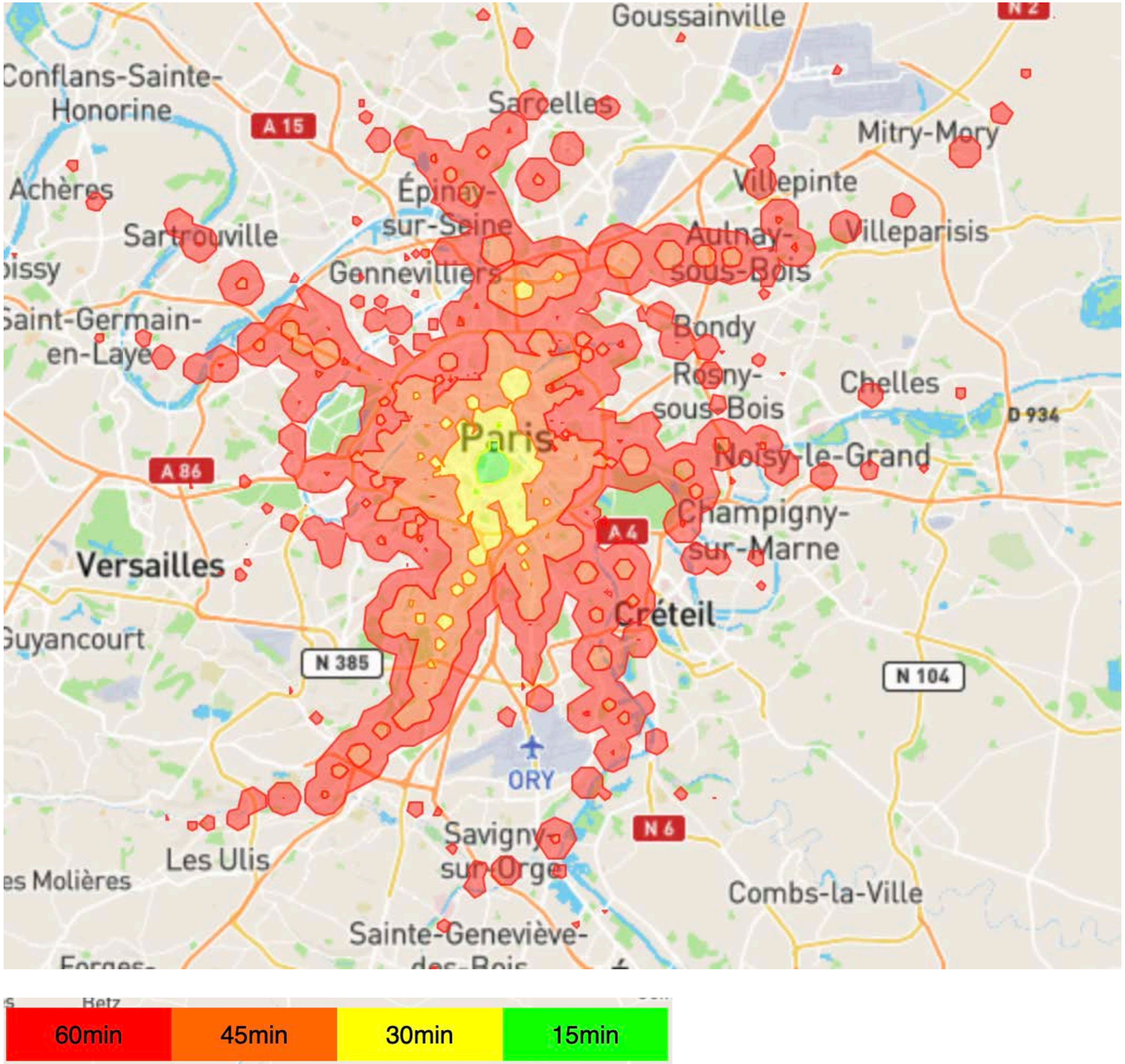


A quoi ressemble la boule de centre Notre Dame de Paris et de rayon 1 heure ?

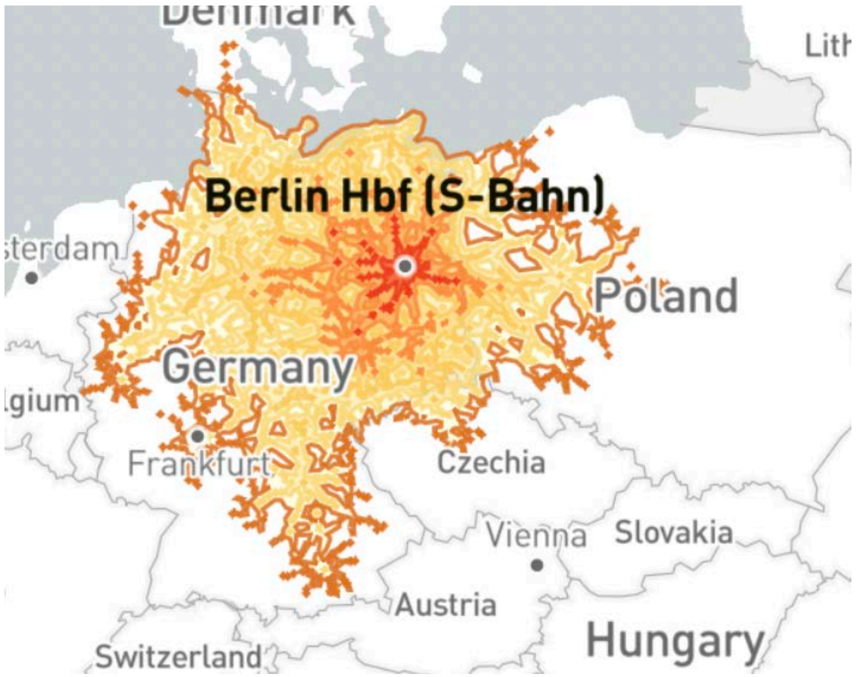
Si l'on était dans le Sahara :

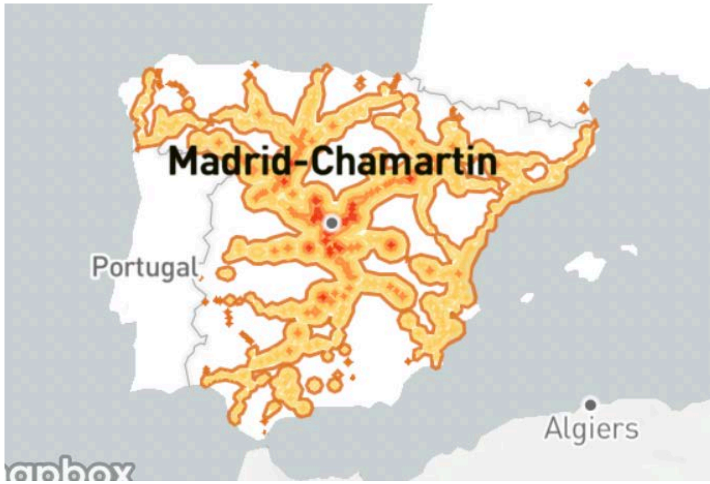


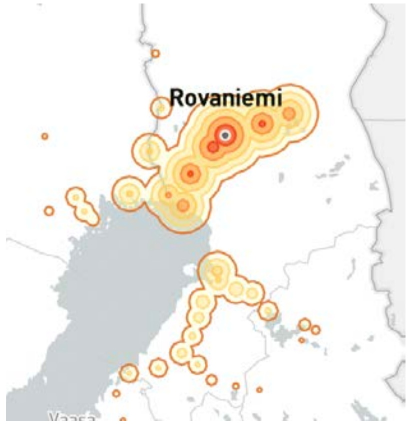
A quoi ressemble la boule de centre Notre Dame de Paris et de rayon 1 heure ?



Autres villes

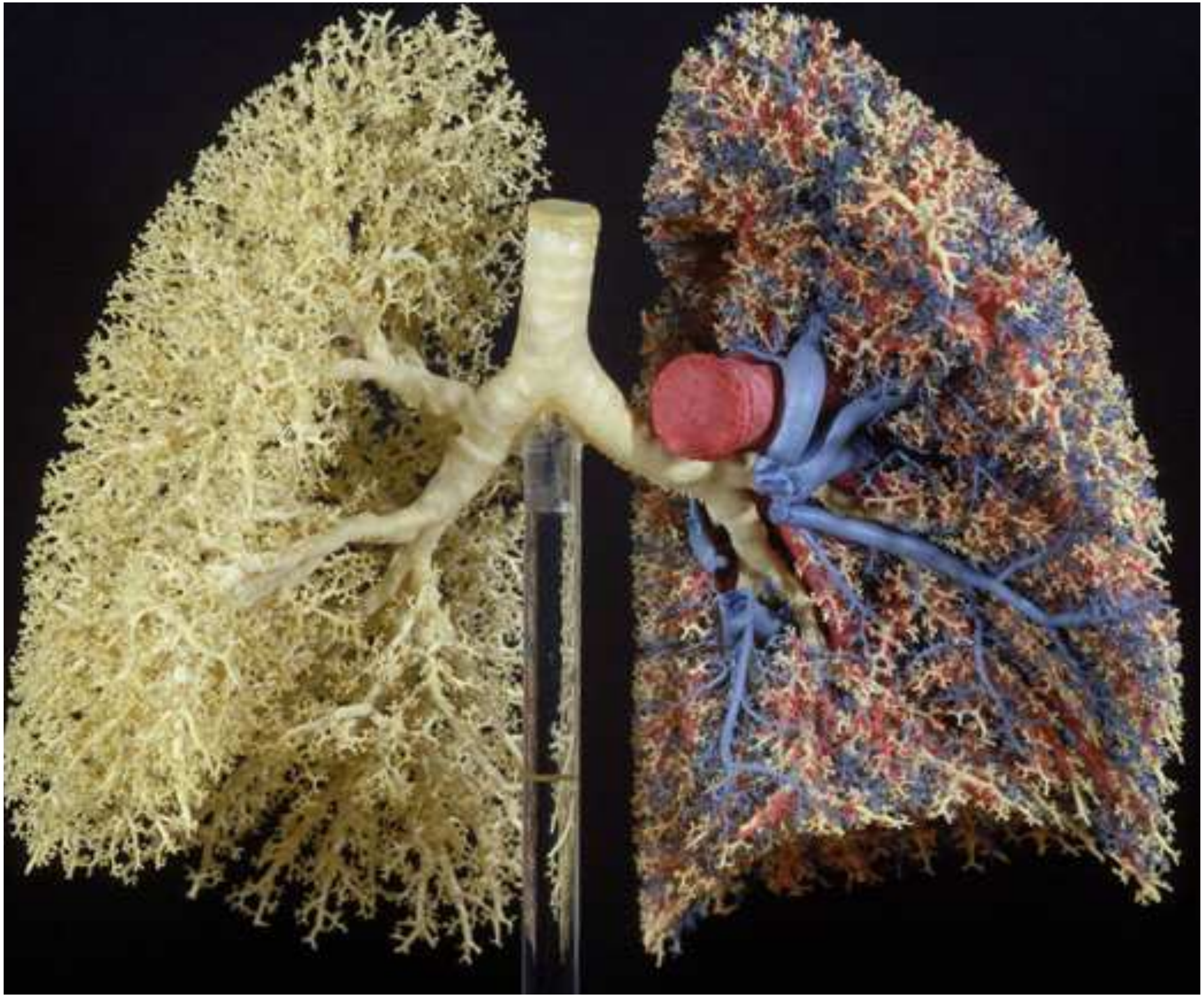




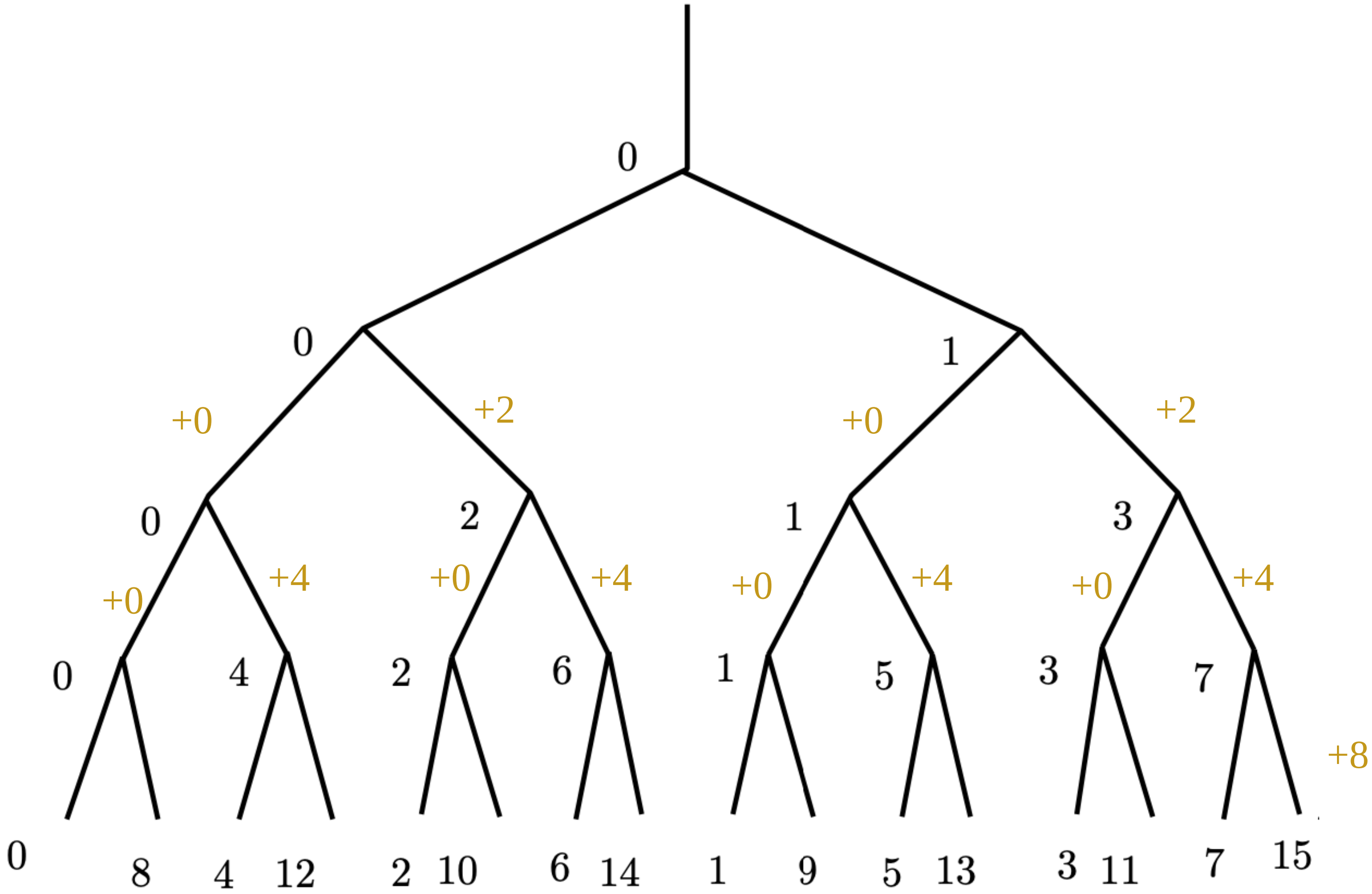


https://www.chronotrains.com/fr

Des distances encore plus exotiques : distances ultra-métriques



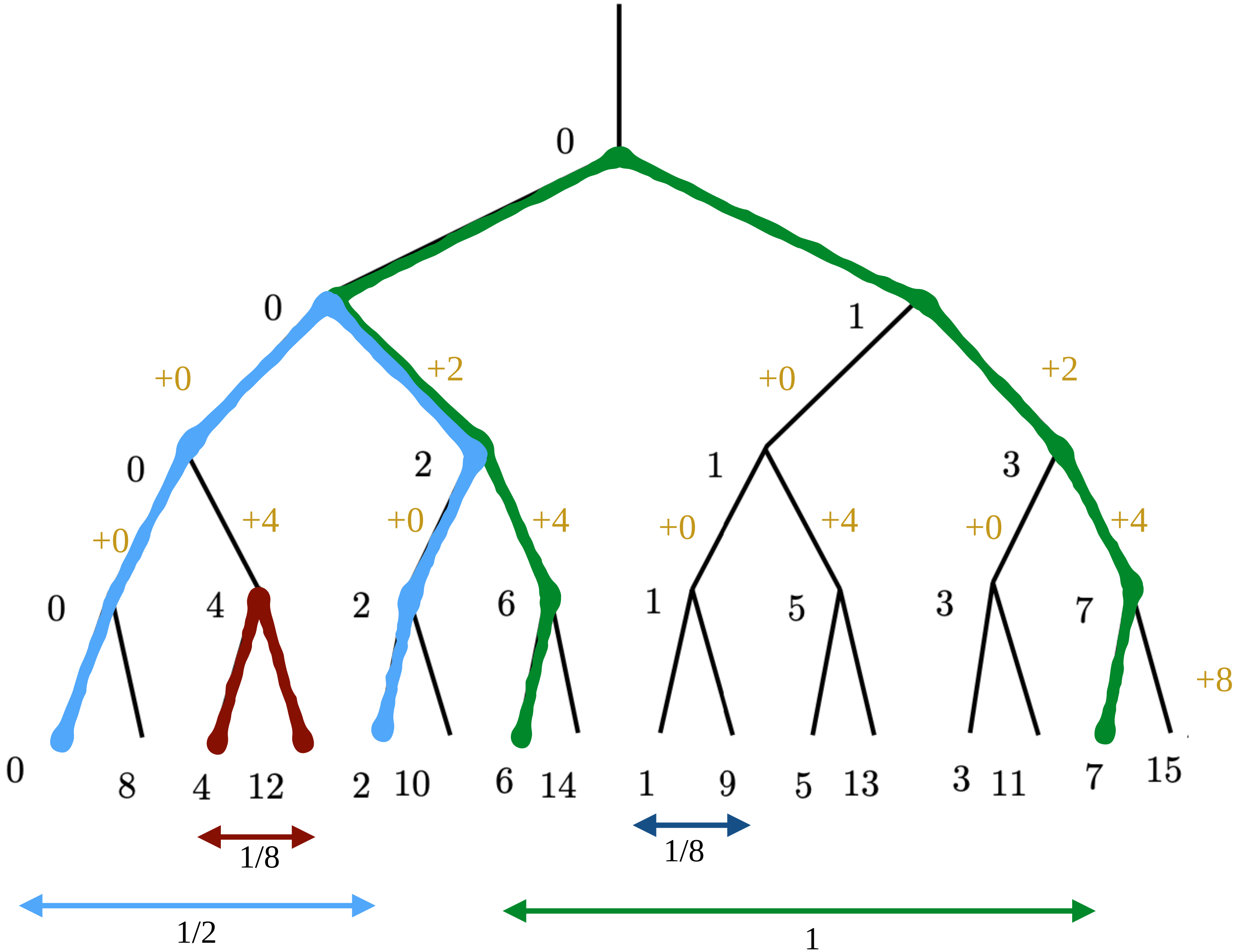
Des distances encore plus exotiques : distances ultra-métriques



$a \in \Gamma = \mathbb{Z}/2^N\mathbb{Z}$ on écrit $a = 2^k a'$, où a' est impair

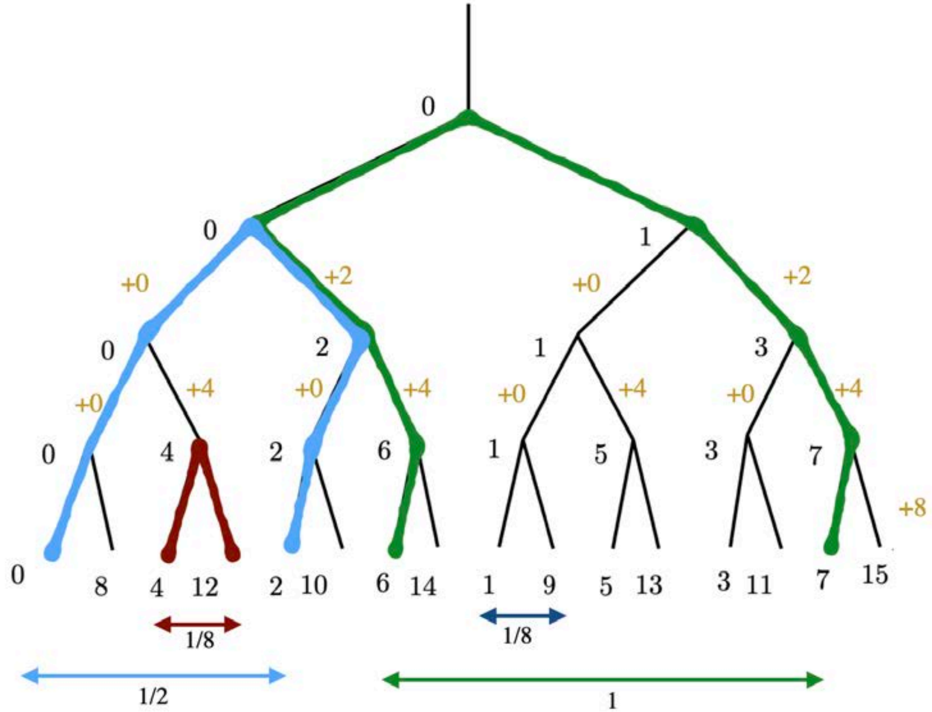
k : valuation dyadique. On définit $|a|_2 = 2^{-k}$ et $d(a,b) = |b-a|_2$

Des distances encore plus exotiques : distances ultra-métriques
Modèle archétype : ensemble des feuilles d’un arbre dyadique



$$d(x,y) \leq \max(d(x,z), d(z,y)) \leq d(x,z) + d(z,y) \quad \forall x,\ y,\ z$$

Des distances encore plus exotiques : distances ultra-métriques



Distance aux propriétés bizarres :

- tout point d'une boule est centre de cette boule
- deux boules sont soit disjointes, soit concentriques (l'une est incluse dans l'autre)
- Tout triangle est isocèle …

Des distances encore plus exotiques : distances ultra-métriques

Des distances encore plus exotiques : distances ultra-métriques

Dualité Lagrangien / Eulérien

Termes issus de la mécanique des fluides

Eulérien : on s’intéresse à l’évolution en temps d’une quantité en un point d’observation fixé
Exemple t—> u(x,t) : vitesse cours du temps au point x (fixe)

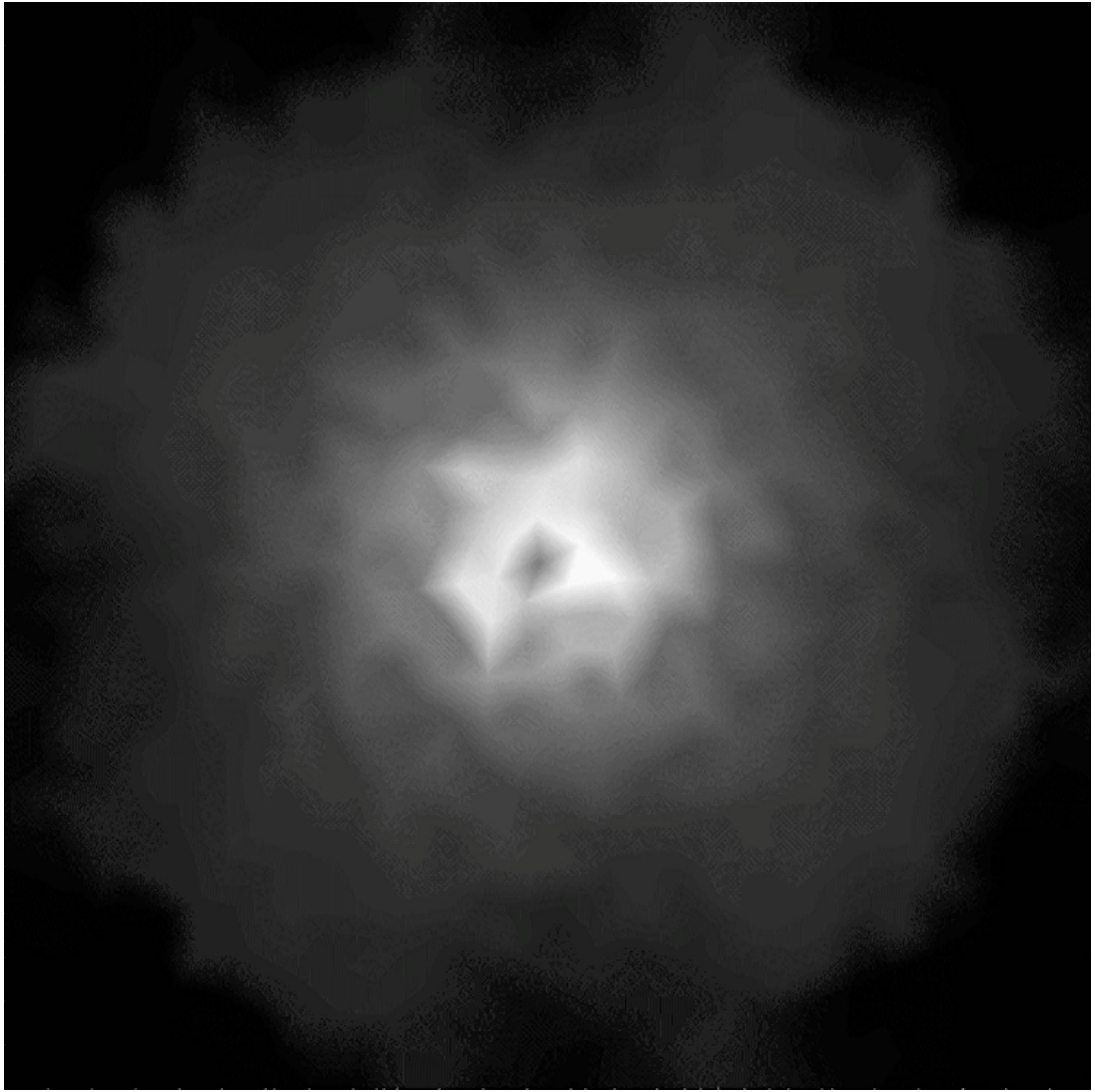
L’essentiel de la formalisation mathématique en mécanique des fluides, des milieux continus, est basé sur une approche eulérienne (Equations aux Dérivées Partielles). Basé sur l’hypothèse essentielle que les particules sont *indiscernables* (on se sait pas qui est où).

Exemple dans le domaine des données: affluence dans un édifice au fil de la journée.

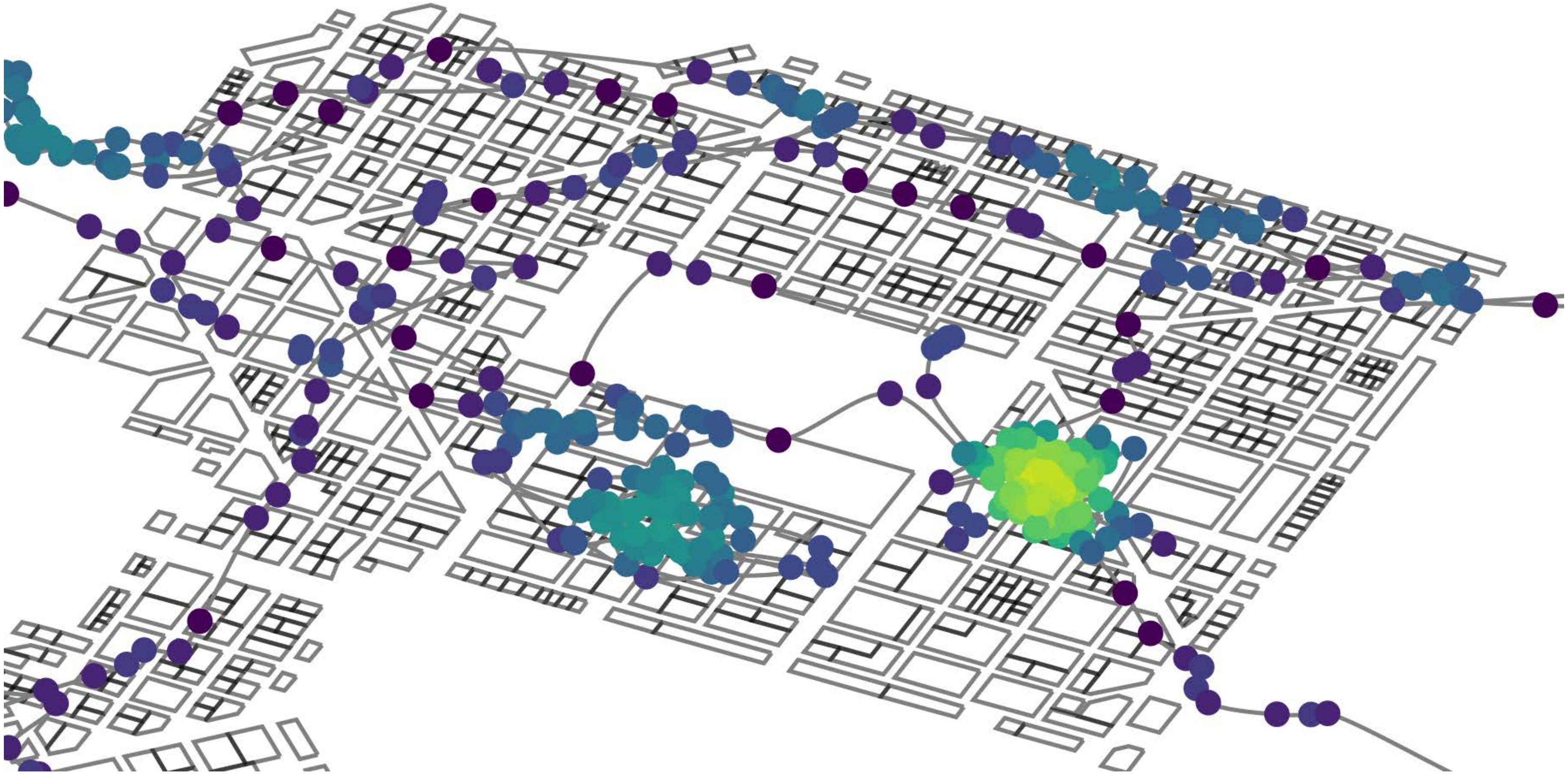
Lagrangien : on suit une quantité associée à une entité.

Exemple dans le domaine des données: trace GPS donnant la position d’un individu au fil du temps

Eulérien : mouvement d’une substance d’un centre vers la périphérie



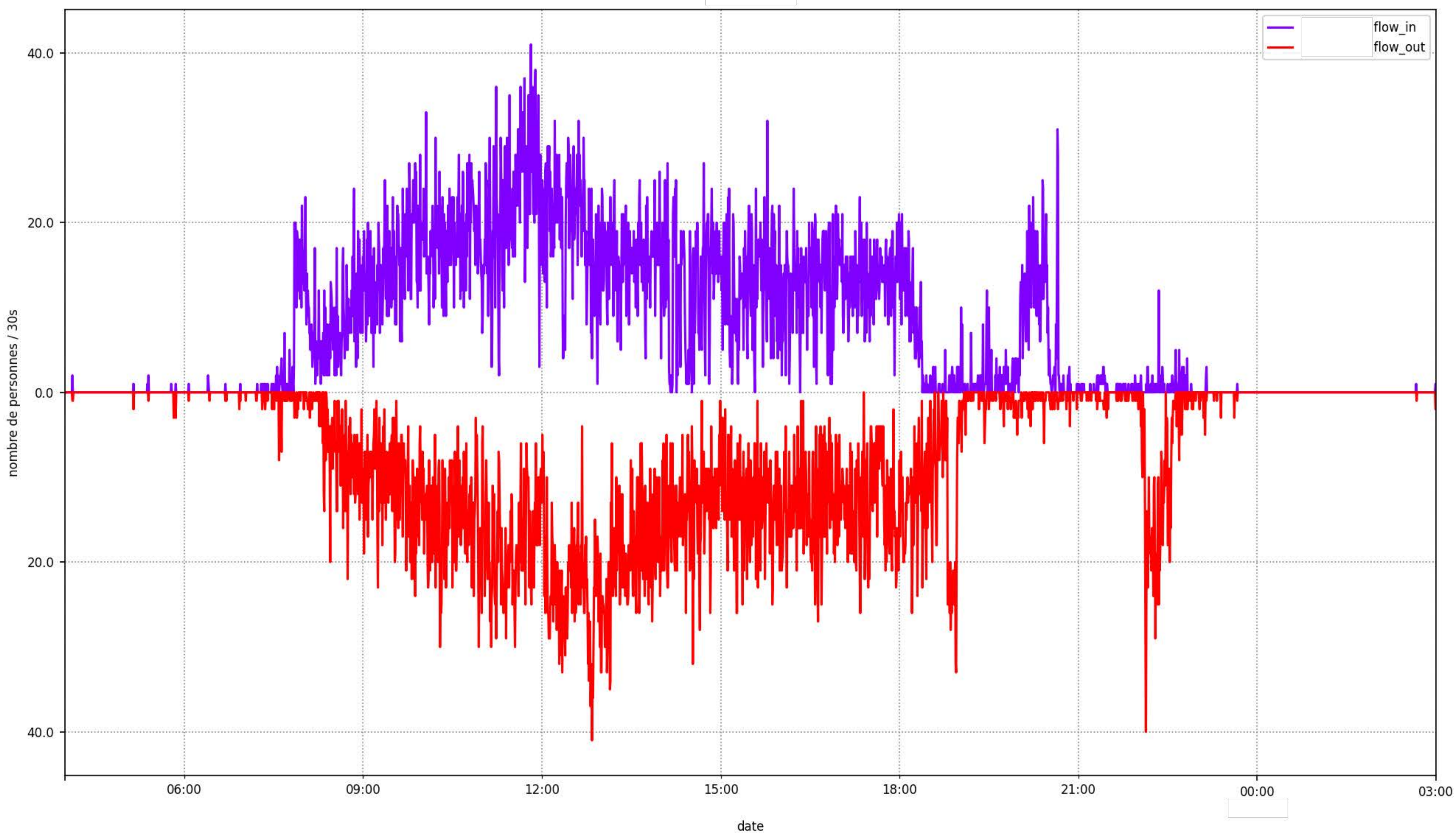
Lagrangien : trajectoire d’un visiteur dans un salon



Exemple de problème Eulérien—-> Lagrangien

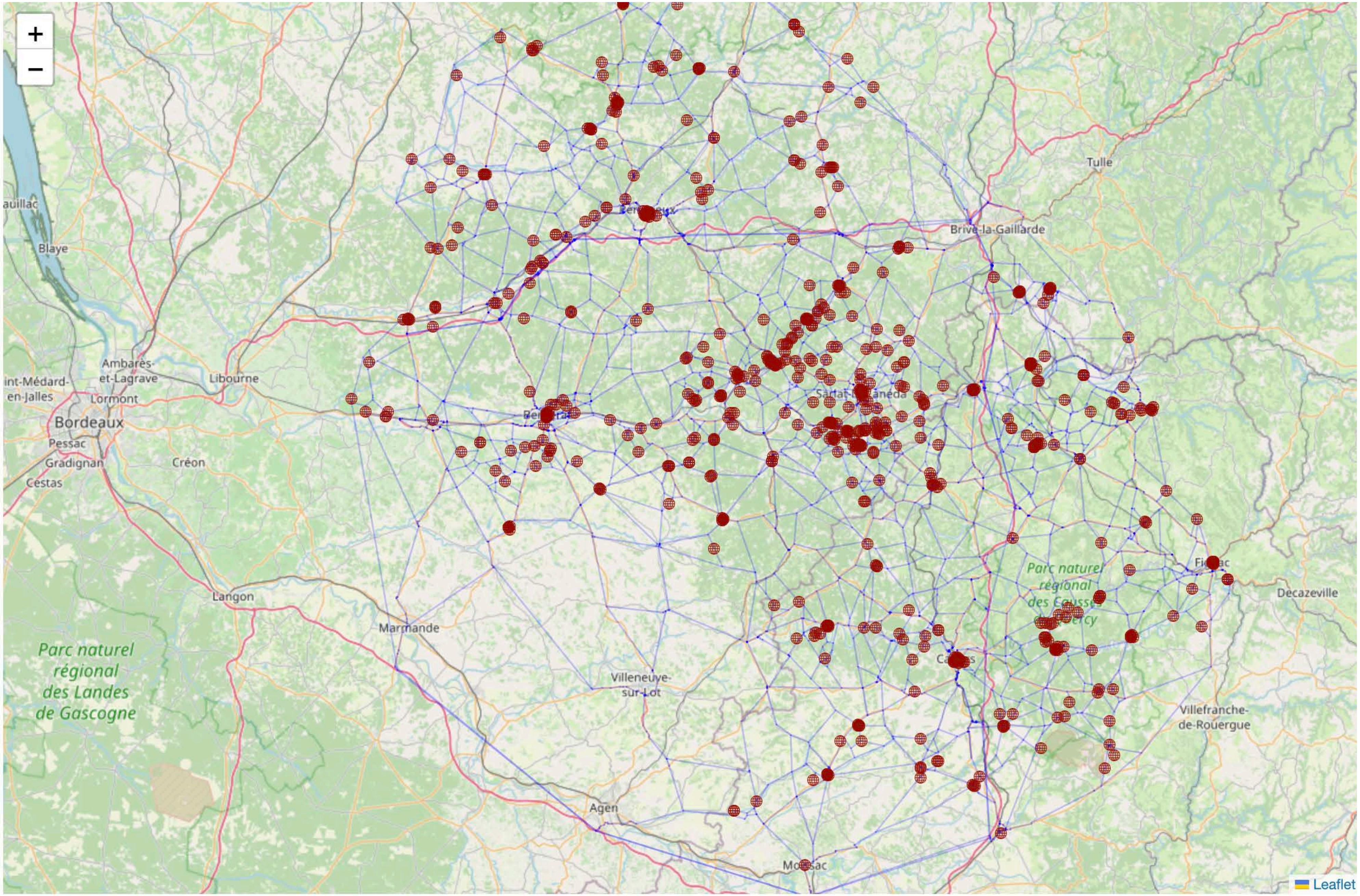
Données de flux d'entrée / sortie dans un édifice

Question : distribution des temps de visite ? (Avec S. Faure, R. Tessandier)



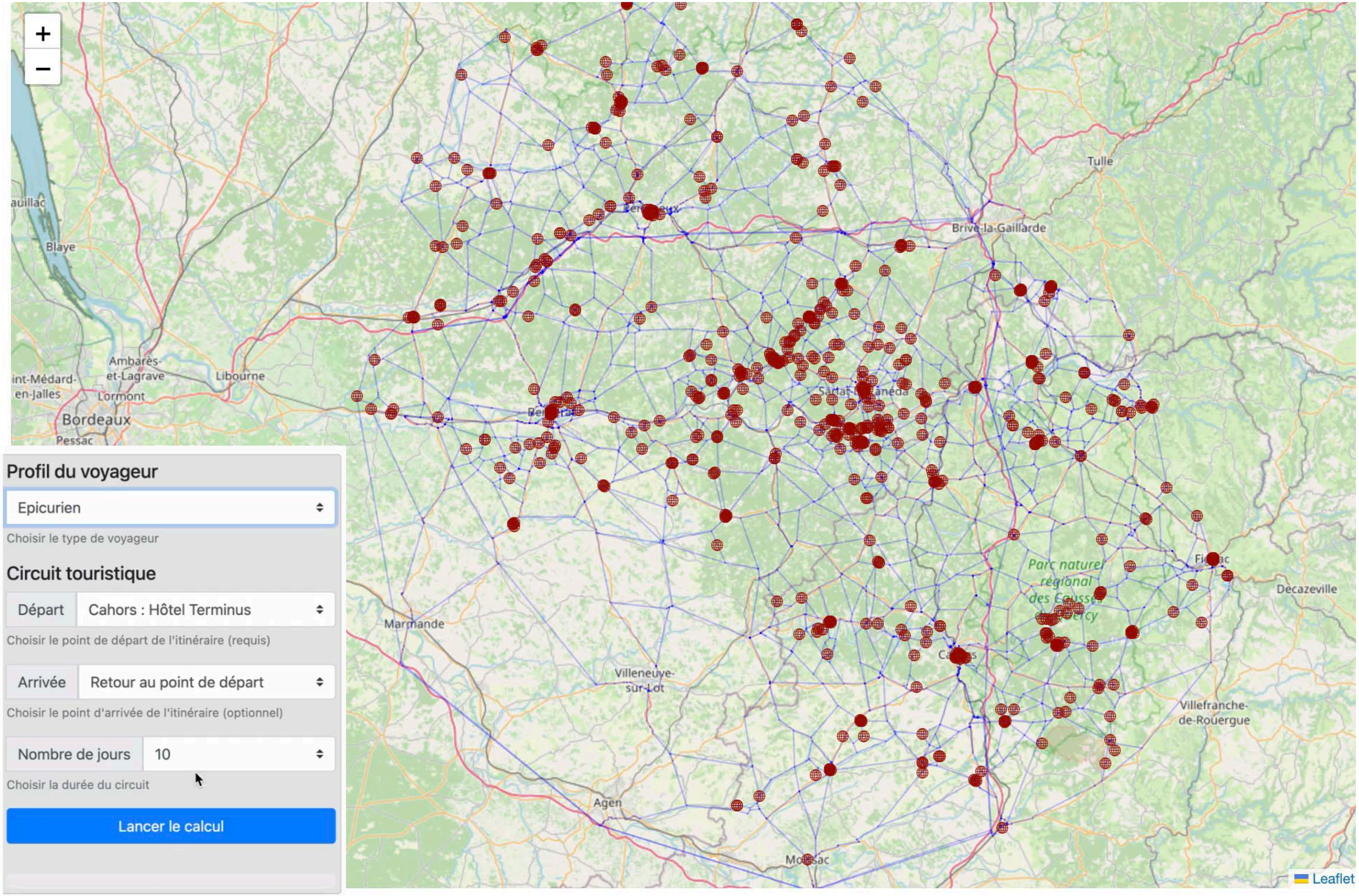
S. Faure

Tourisme

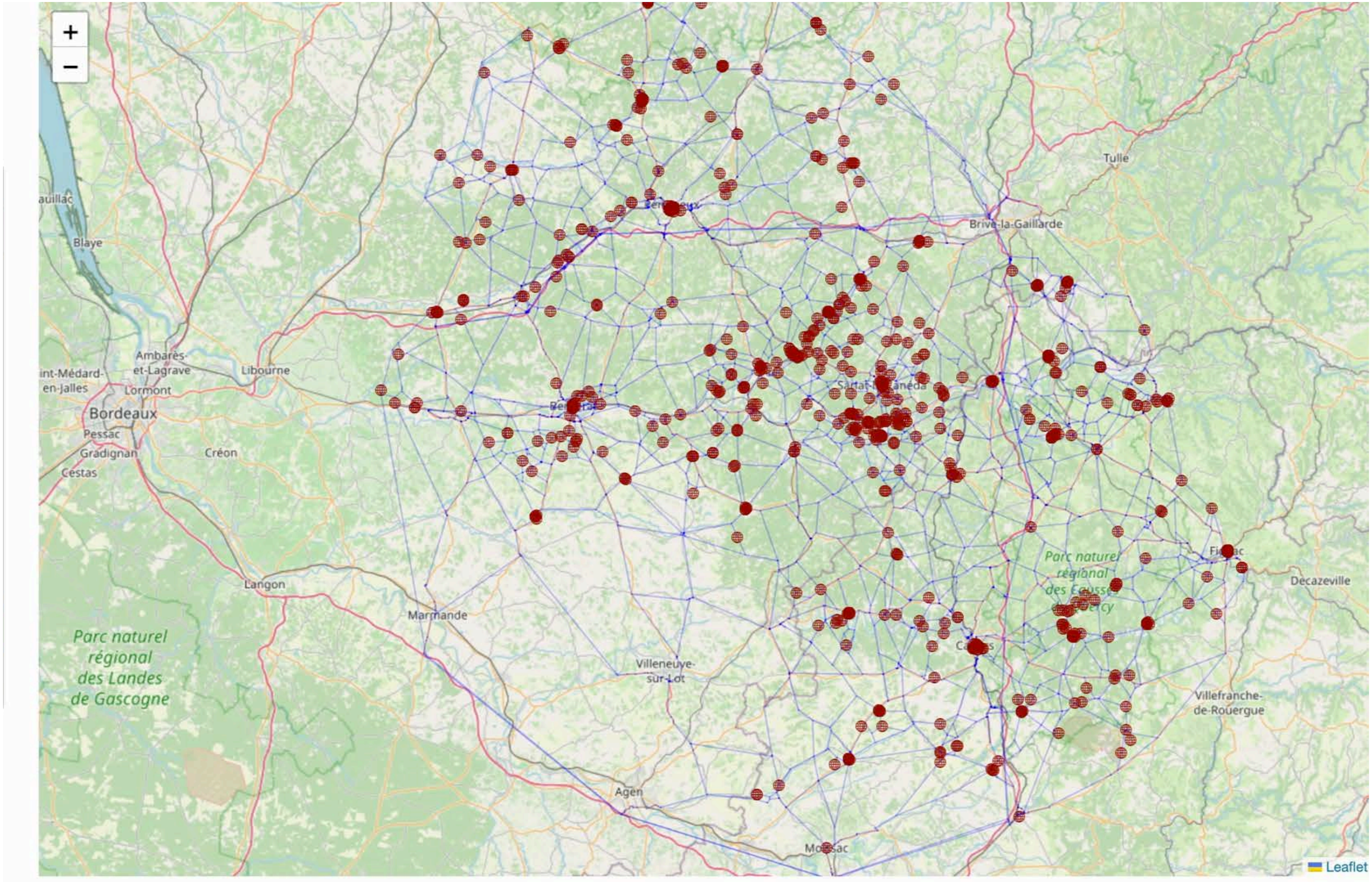


Tulle
Brive-la-Gaillarde
Blaye
Ambarès-et-Lagrave
Libourne
Lormont
Bordeaux
Pessac
Gradignan
Créon
Cestas
Langon
Marmande
Parc naturel régional des Landes de Gascogne
Villeneuve-sur-Lot
Agen
Decazeville
Villefranche-de-Rouergue
Leaflet

Tourisme


+
−
Profil du voyageur
Epicurien
Choisir le type de voyageur
Circuit touristique
Départ
Cahors : Hôtel Terminus
Choisir le point de départ de l'itinéraire (requis)
Arrivée
Retour au point de départ
Choisir le point d'arrivée de l'itinéraire (optionnel)
Nombre de jours
10
Choisir la durée du circuit
Lancer le calcul
Tulle
Brive-la-Gaillarde
Blaye
Ambarès-et-Lagrave
Libourne
Lormont
Bordeaux
Pessac
Marmande
Villeneuve-sur-Lot
Agen
Parc naturel régional des Causses du Quercy
Decazeville
Villefranche-de-Rouergue
Leaflet

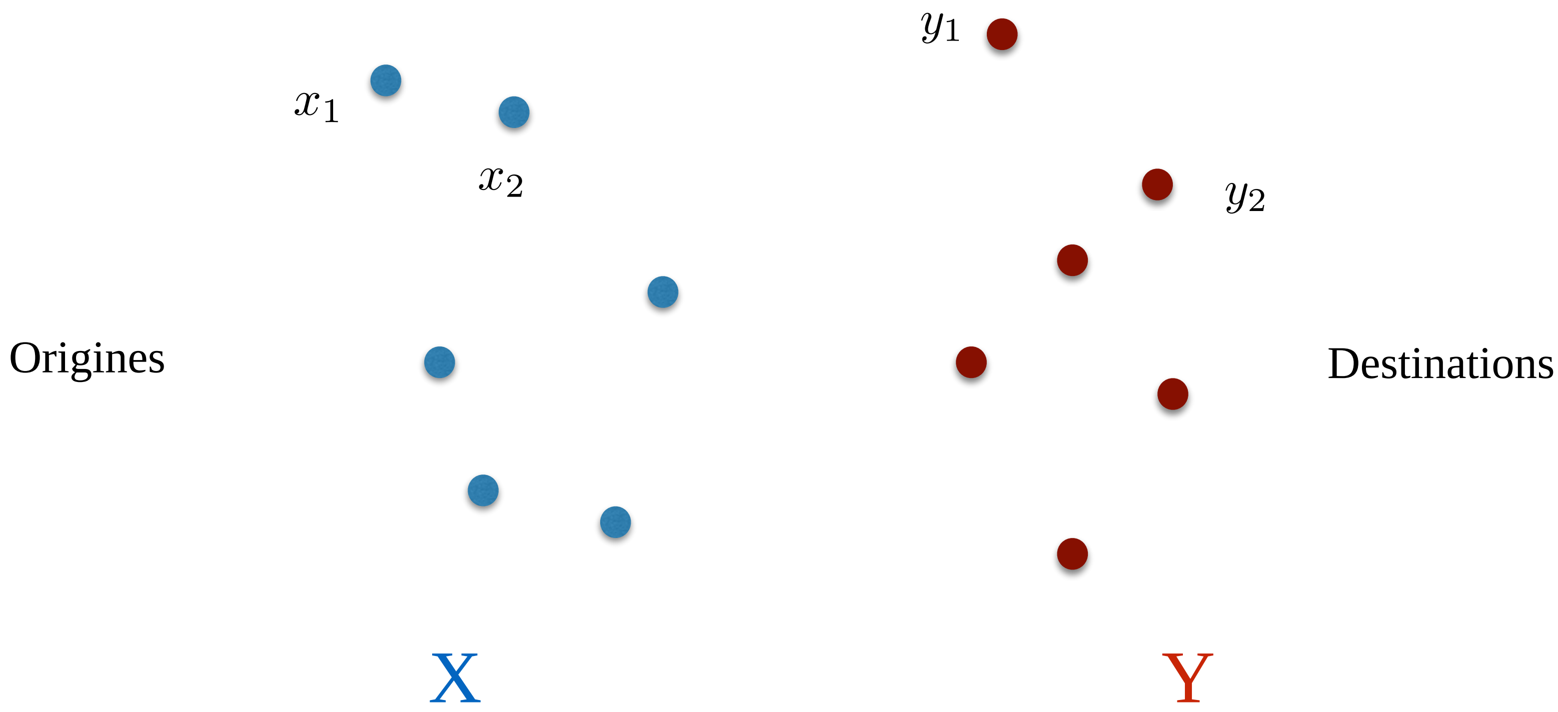
Tourisme



+
−
Tulle
Brive-la-Gaillarde
Blaye
Ambarès-et-Lagrave
Libourne
Lormont
Bordeaux
Pessac
Gradignan
Cestas
Créon
Langon
Marmande
Parc naturel régional des Landes de Gascogne
Villeneuve-sur-Lot
Agen
Decazeville
Villefranche-de-Rouergue
Parc naturel régional des Causses du Quercy
Leaflet

Transport optimal

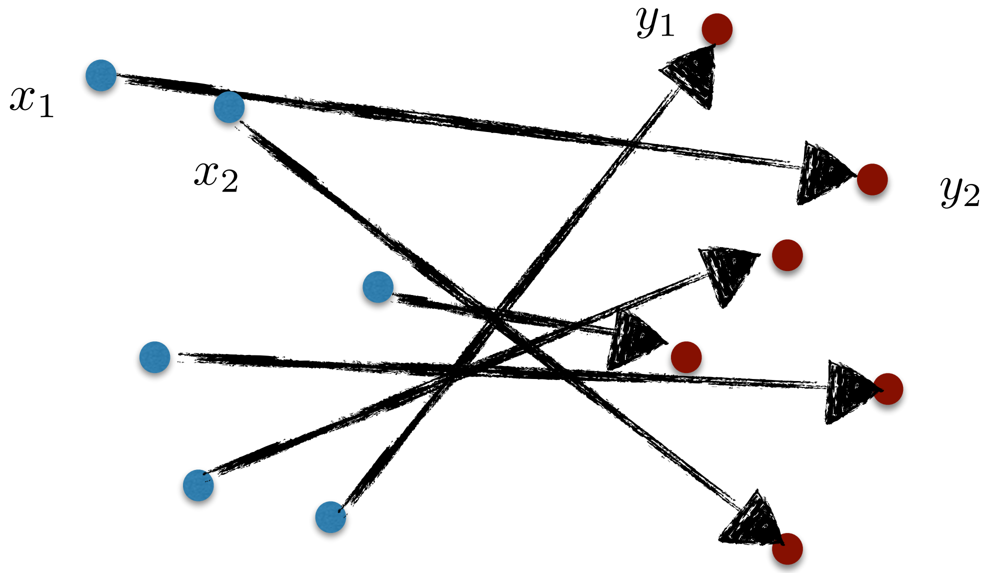
(G. Peyré)



c_{ij} : coût de transport de x_i vers y_j

Transport optimal (Monge)

Origines



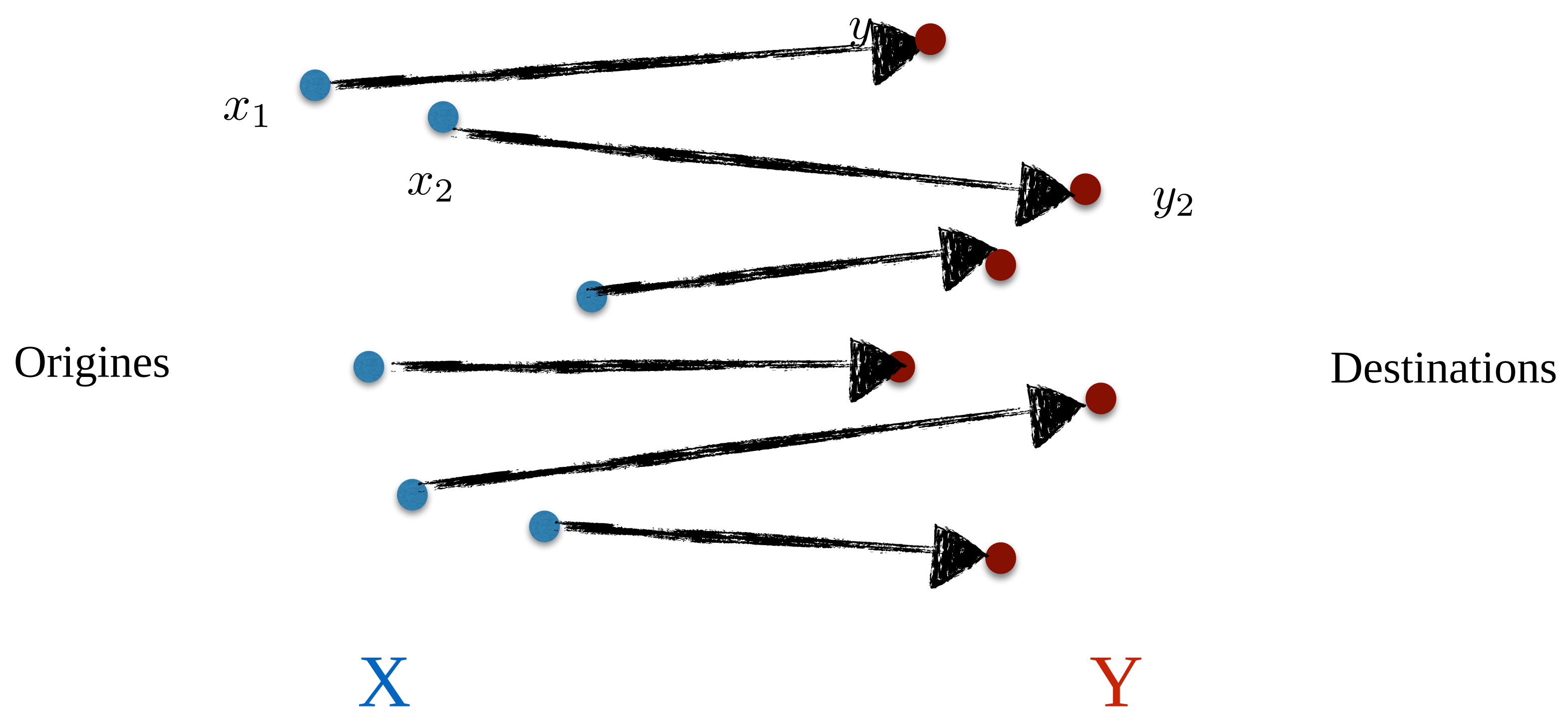
Destinations

X

Y

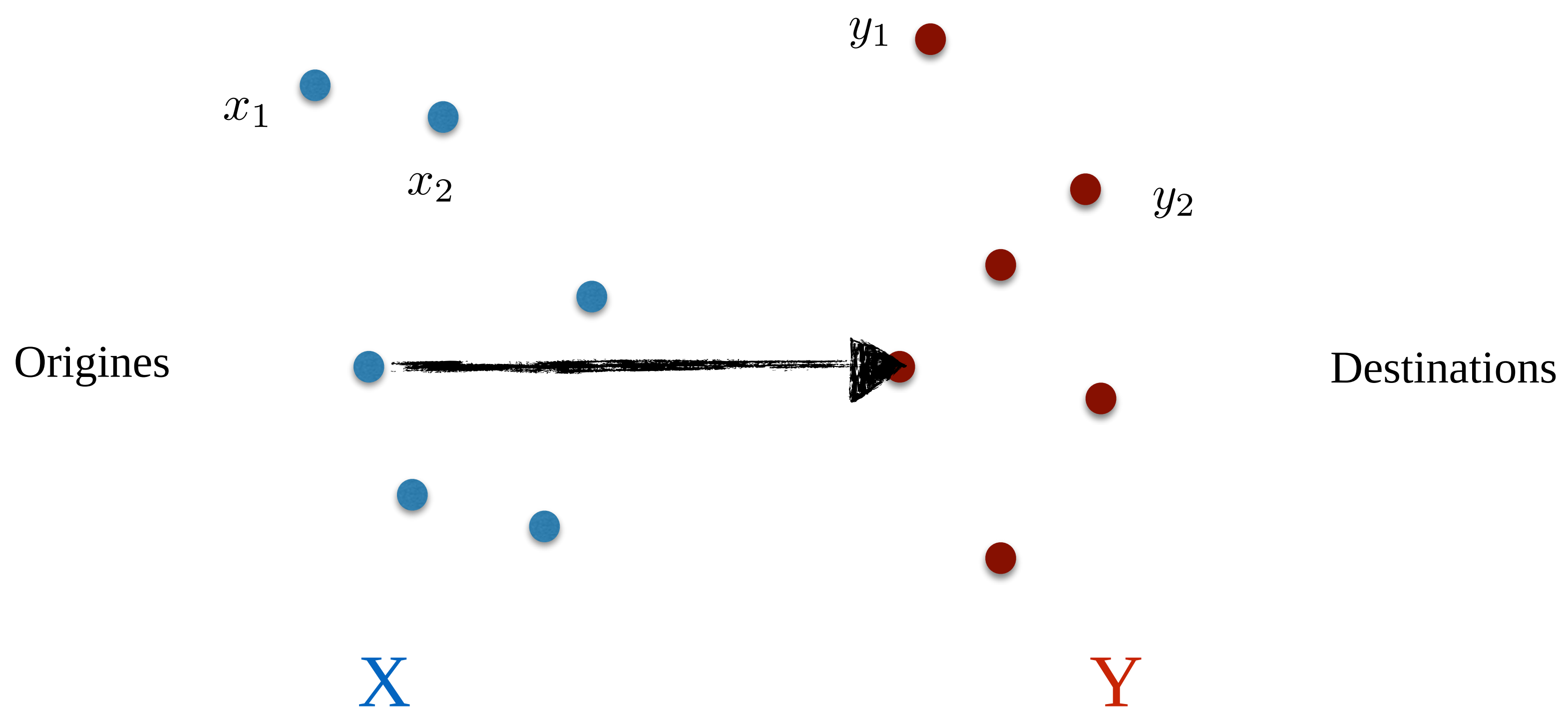
c_{ij} : coût de transport de x_i vers y_j

Transport optimal (Monge)

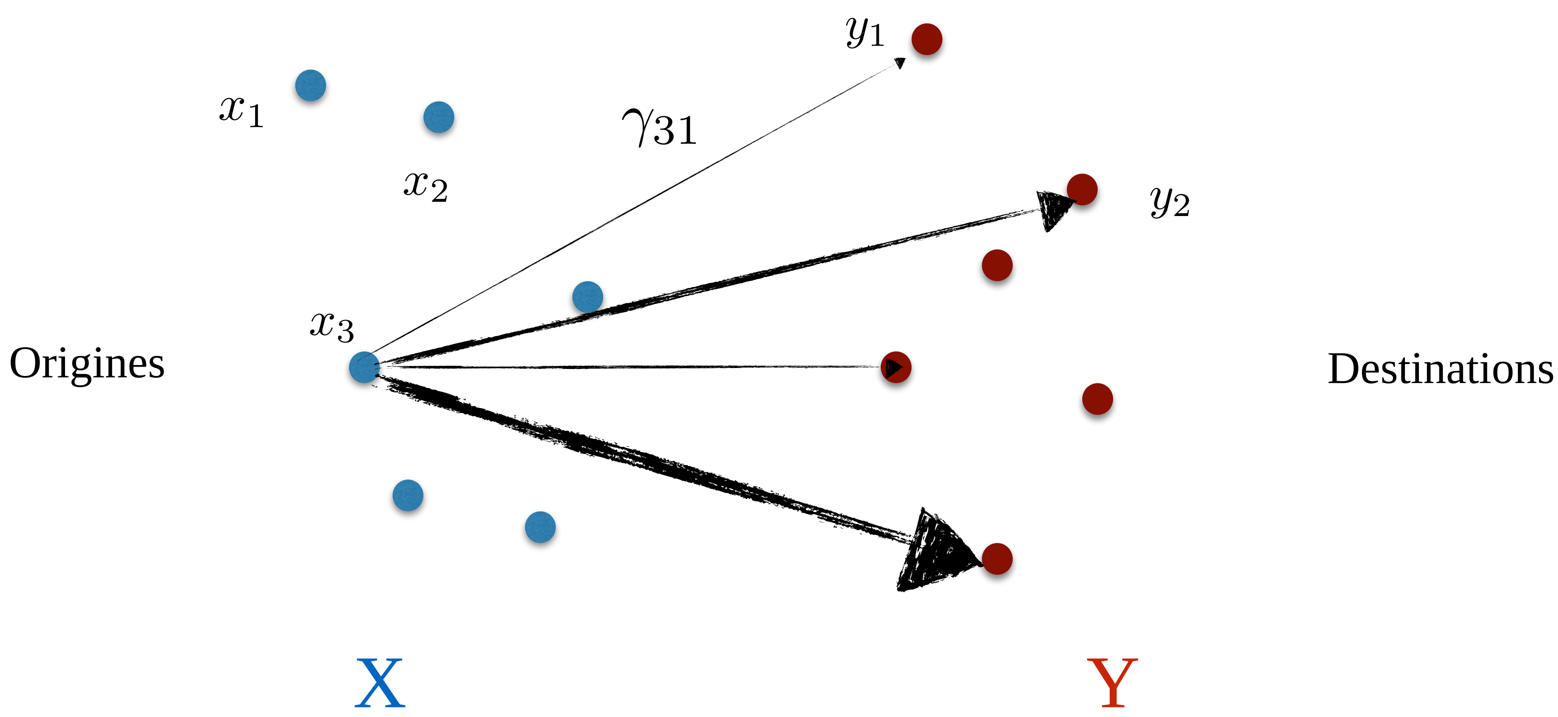


c_{ij} : coût de transport de x_i vers y_j

Transport optimal (Kantorovich)



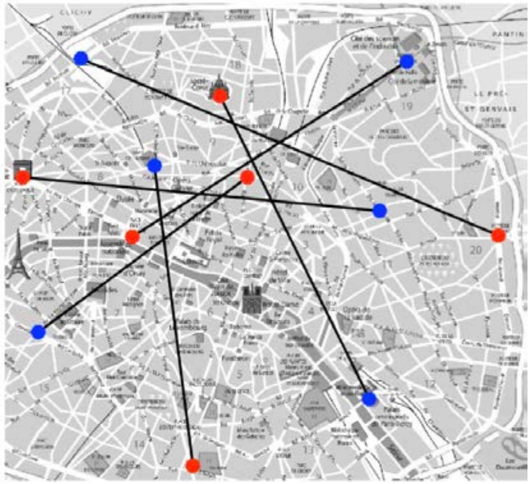
Transport optimal (Kantorovich)



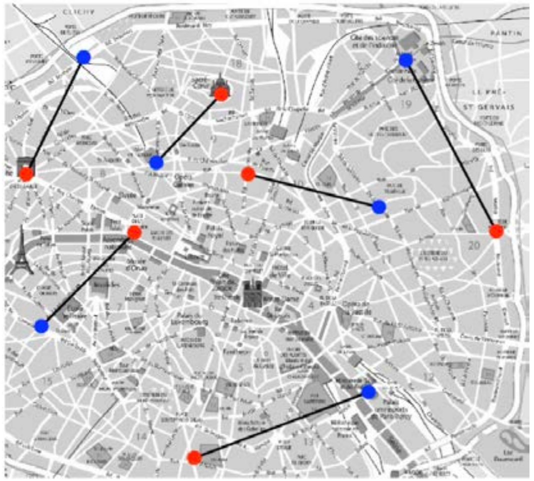
γ_{ij} : quantité de matière envoyée de x_i vers y_j

Coût total : $$C(\gamma) = \sum_{i,j} \gamma_{ij}\, c_{ij}$$

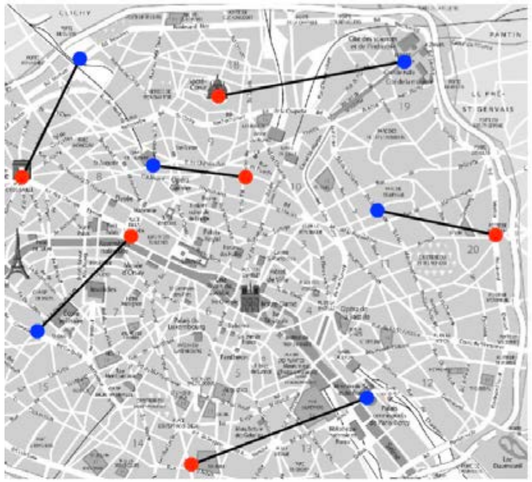
Croissants : des boulangeries aux cafés



152



66



64

G. Peyré (Images des Mathématiques)

Transport optimal

Utilisation directe pas forcément très pertinente dans le monde du social

Exemple : X correspond aux lieux d'habitation de N personnes
Y correspond à leurs lieux de travail
j = F(i) est l'indice de l'endroit où travaille i

$$C = \sum_i c_{iF(i)}$$

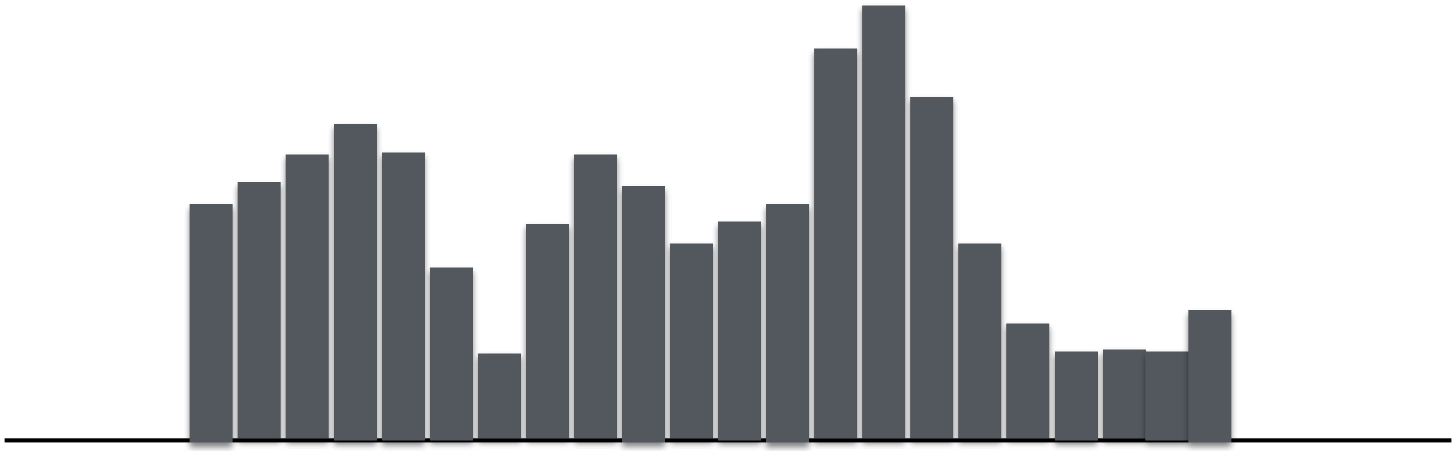
Coût total de transport (par exemple temps total « perdu » dans les transport)
Problème « naturel »: rechercher un scénario d'affectation i—>j qui minimise le coût

Problème intéressant mathématiquement, mais hors sol (présuppose que les personnes sont interchangeables, et affectable à n'importe quelle tâche).

Transport optimal

Plus fécond : cette approche permet de construire une *distance* entre mesures (distributions de masses, de grains, de personnes)

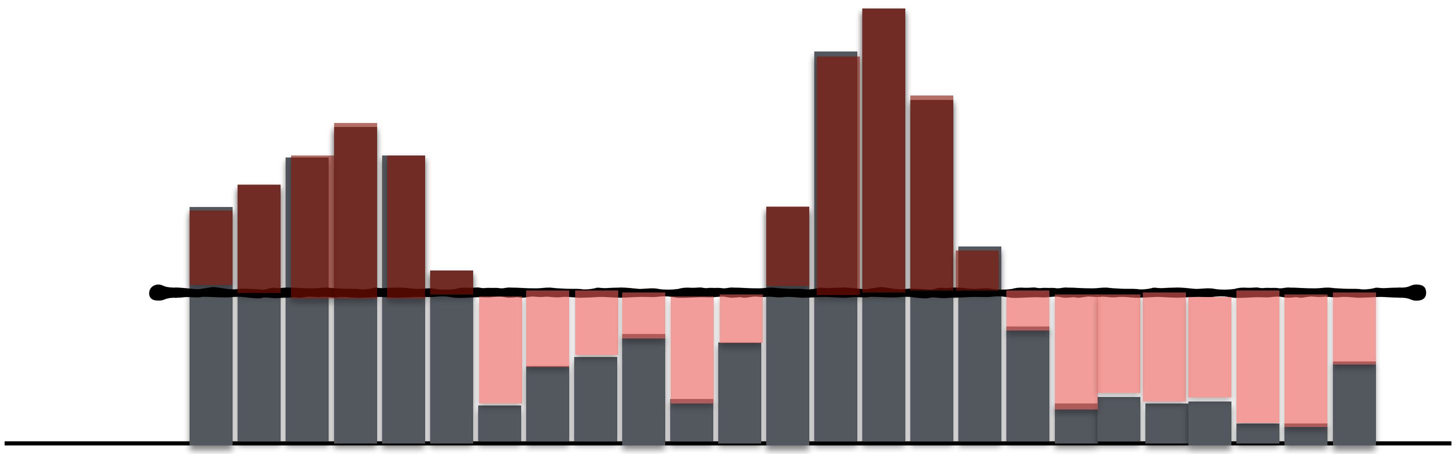
Par exemple, si l'on se donne une densité de personnes, cela permet de mesurer l'écart relativement à la situation uniforme (quantification de l'hétérogénéité), sans utiliser d'approche spectrale.



Transport optimal

Plus fécond : cette approche permet de construire une *distance* entre mesures (distributions de masses, de grains, de personnes)

Par exemple, si l'on se donne une densité de personnes, cela permet de mesurer l'écart relativement à la situation uniforme (quantification de l'hétérogénéité), sans utiliser d'approche spectrale.

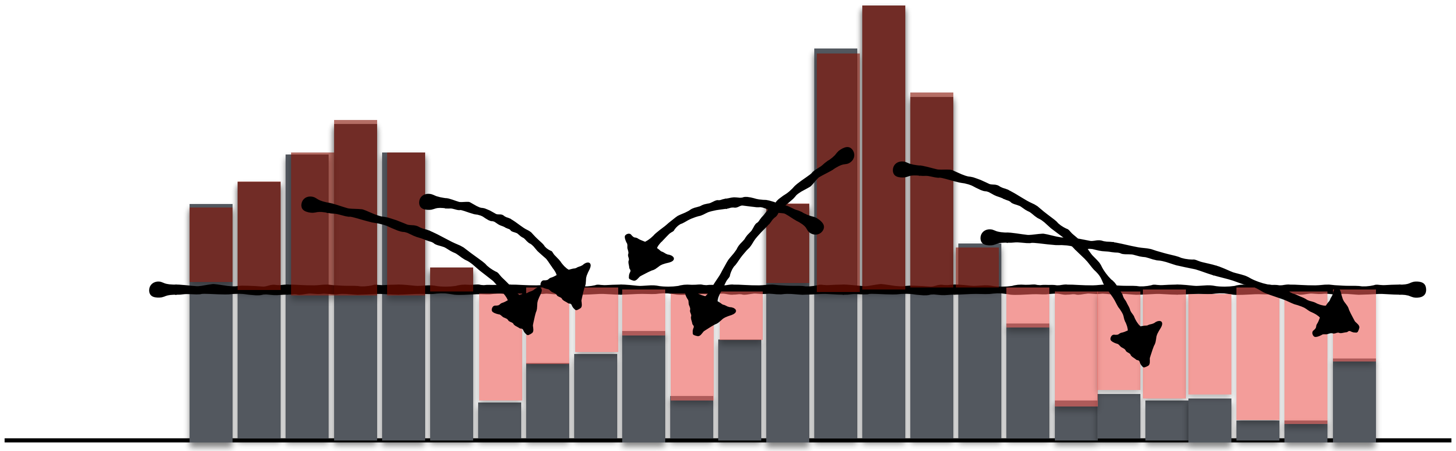


Approche traditionnelle, *verticale / eulérienne*: on quantifie l'écart local à la valeur de référence

Transport optimal

Plus fécond : cette approche permet de construire une *distance* entre mesures (distributions de masses, de grains, de personnes)

Par exemple, si l’on se donne une densité de personnes, cela permet de mesurer l’écart relativement à la situation uniforme (quantification de l’hétérogénéité), sans utiliser d’approche spectrale.

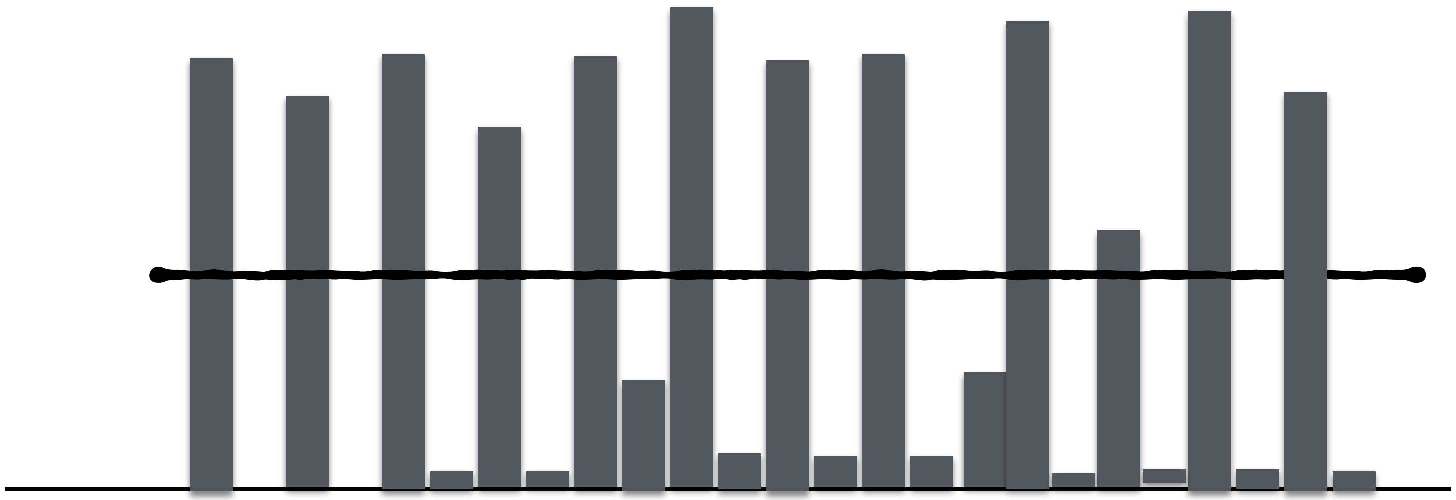


Approche transport optimal, *horizontale / lagrangienne* : on évalue de combien il faudrait *déplacer* les personnes en moyenne pour rendre la distribution uniforme

Transport optimal

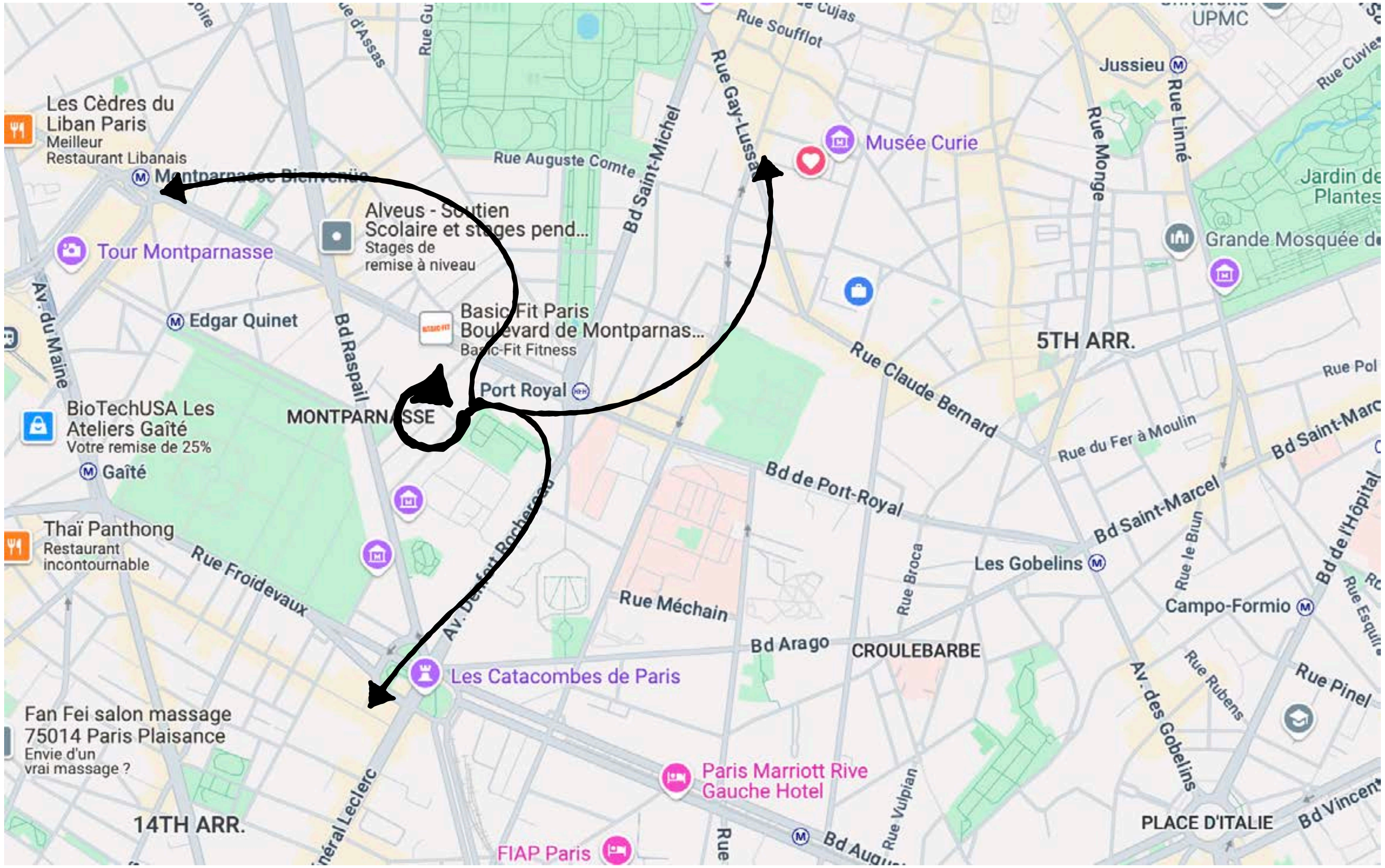
Plus fécond : cette approche permet de construire une *distance* entre mesures (distributions de masses, de grains, de personnes)

Par exemple, si l'on se donne une densité de personnes, cela permet de mesurer l'écart relativement à la situation uniforme (quantification de l'hétérogénéité), sans utiliser d'approche spectrale.



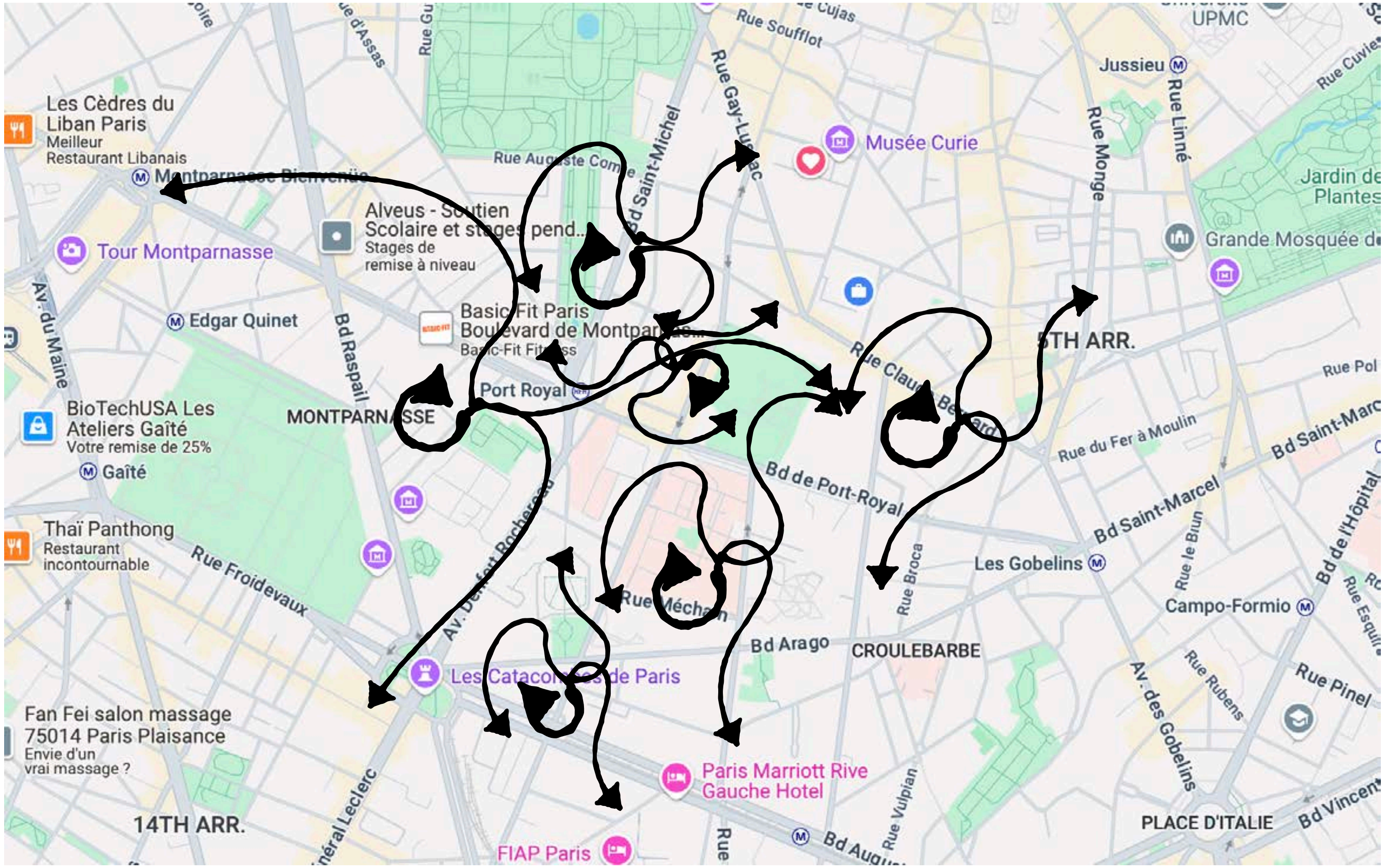
Philosophies très différentes : dans la situation ci-dessus, écart à l'uniformité très *grand* pour la vision eulérienne, très *petit* pour la vision lagrangienne (transport optimal)

Mobilité individuelle



K_{xy} fraction du temps que x passe en y

Mobilité individuelle



K_{xy} fraction du temps que x passe en y

Remarque : matrice de dispersion (information **lagrangiennes** sur les lignes)

$$K = \begin{pmatrix} K_{x_1 y_1} & K_{x_1 y_2} & \dots & K_{x_1 y_M} \\ K_{x_2 y_1} & & & \\ \vdots & \vdots & . & \\ \vdots & \vdots & . & \\ \vdots & \vdots & . & \\ K_{x_N y_1} & K_{x_1 y_2} & \dots & K_{x_N y_M} \end{pmatrix}$$

$$e = (1, 1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$$

$$K^T e = (N_y)\,,\ N_y = \sum_x K_{xy}$$

Nombre moyen de visiteurs en y: information **eulérienne.**

Urban « Planning » (G. Buttazzo & F. Santambrogio 05)

On cherche à comprendre la distribution effective des lieux d'habitation au sein d'une zone urbaine en encodant la tendance des personnes à se rapprocher de certains points de service

Distribution de la densité ρ

Services représentés par $\nu = \sum_{i=1}^{N} \nu_i \delta_{x_i}$

On cherche à minimiser

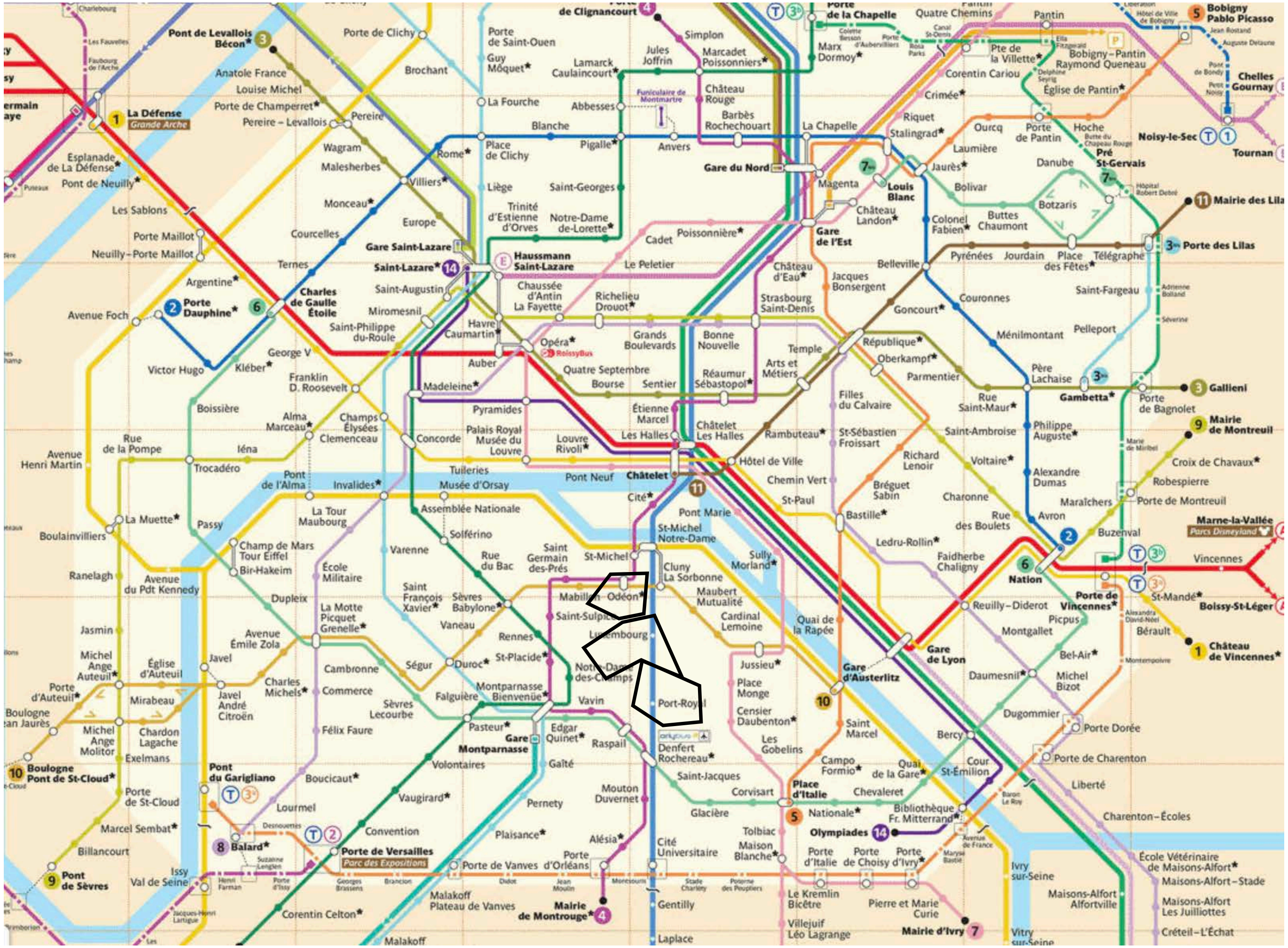
$$J(\rho) = \int F(x)\,\rho(x)\,dx + \int \rho(x)^m\,dx + \frac{1}{2} W_2(\rho,\nu)^2$$

Appétence locale (on cherche à s'installer là où *F* est petit)

On rechigne à s'installer dans des zones trop denses

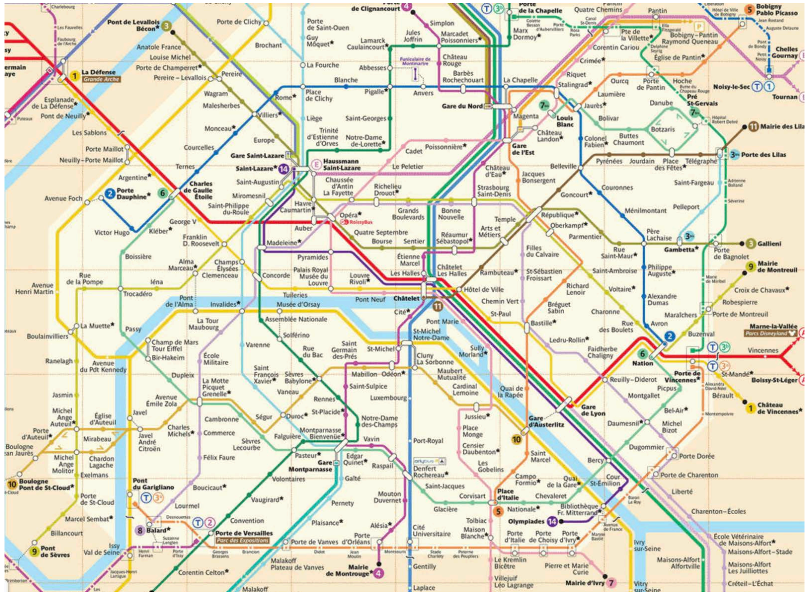
On cherche à être proche d'un lieu de service

Similarité (distance ?) entre zones urbaines

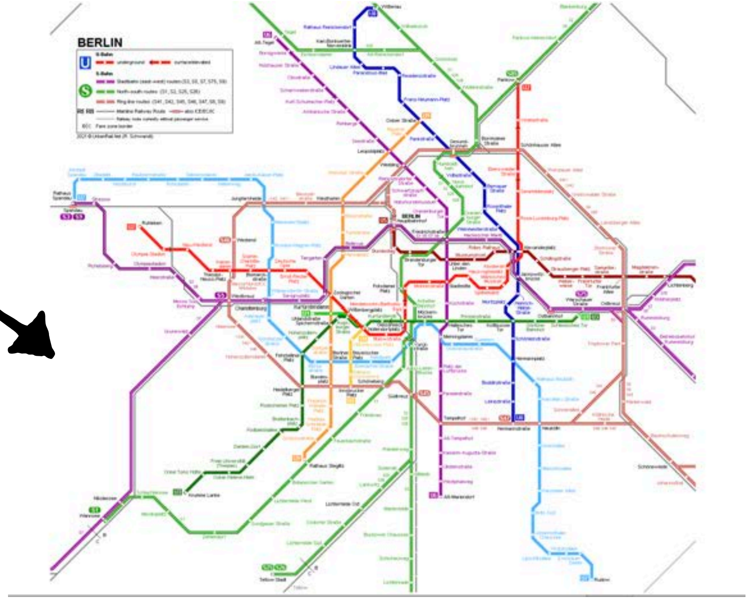


On représente une ville par son réseau de transport, en associant à chaque noeuds le nombre d'habitant dans la cellule.

Similarité (distance ?) entre zones urbaines

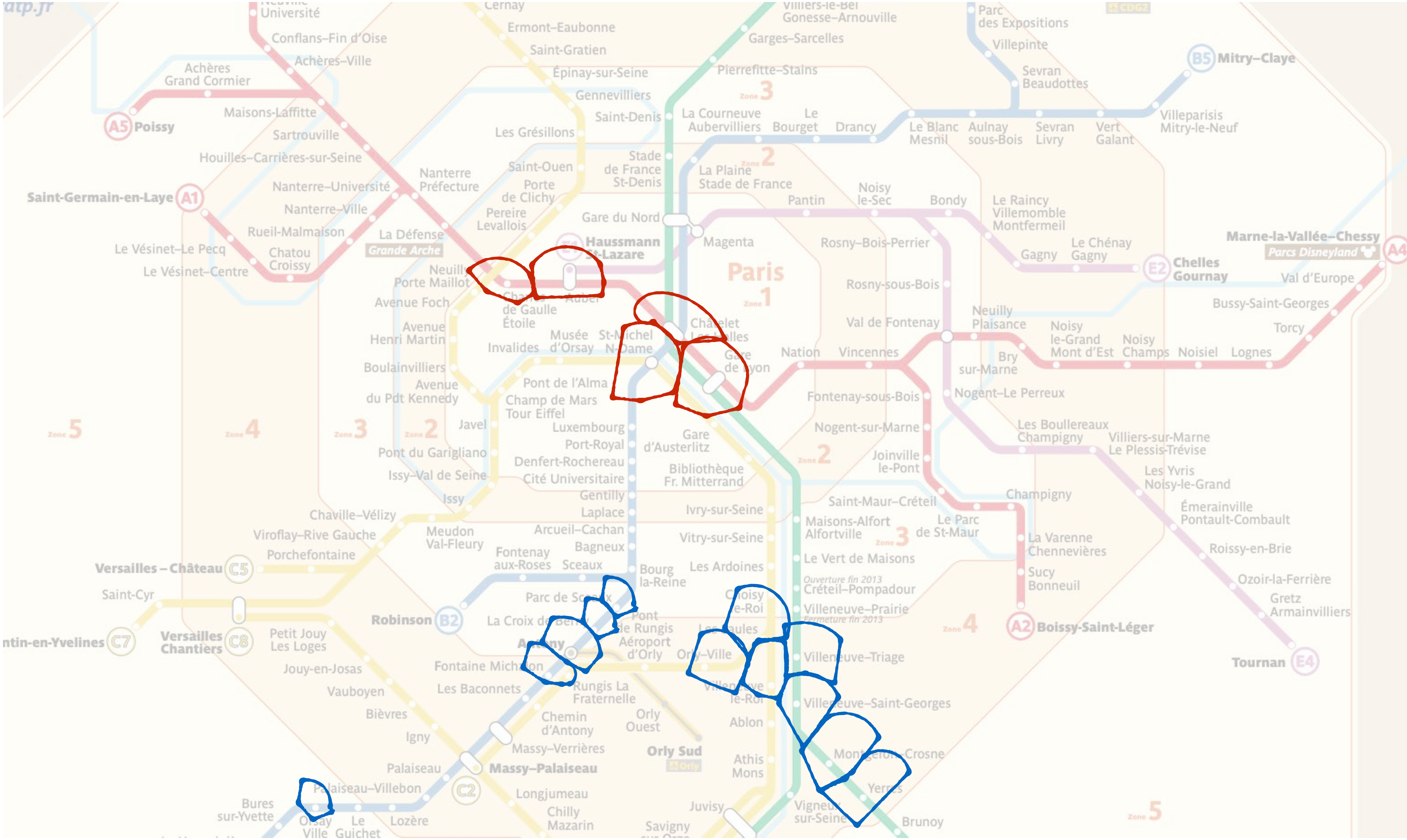


Distance ?



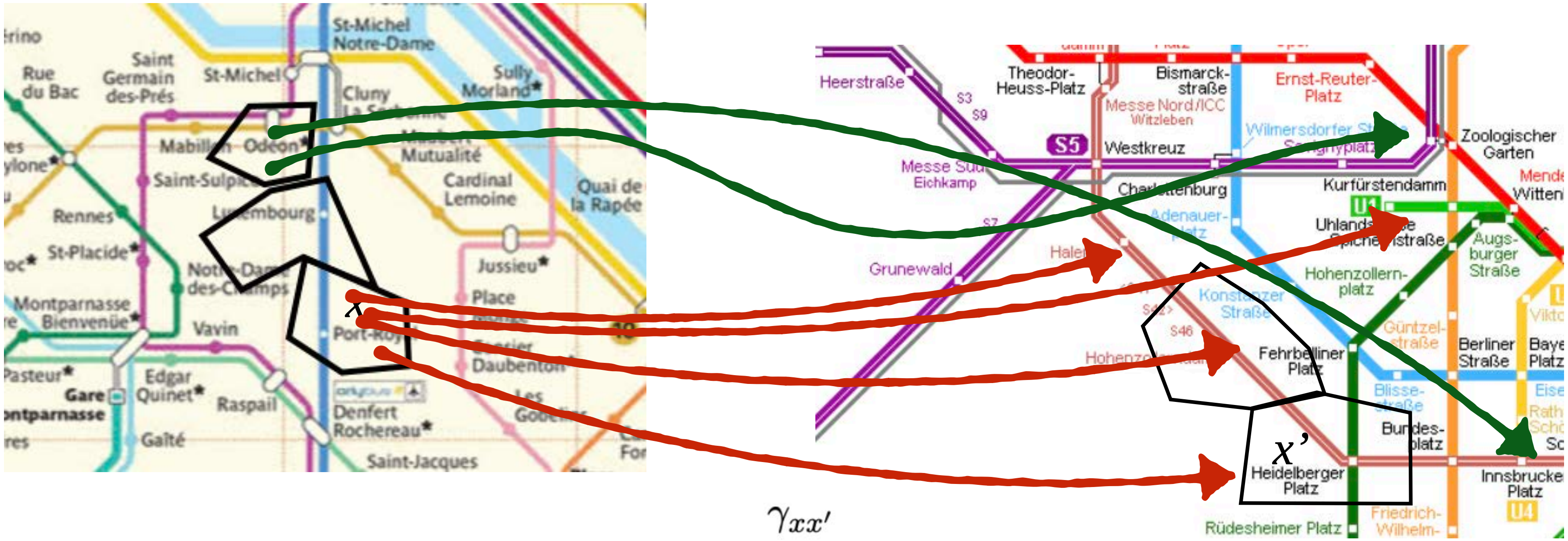
On identifie un ville à son réseau de transport en commun auquel on associes des « masses » (nombre d’habitants) en chaque noeud.

Peut on définir une distance entre 2 centres urbains ?



Espace métrique mesuré

Similarité (distance ?) entre zones urbaines

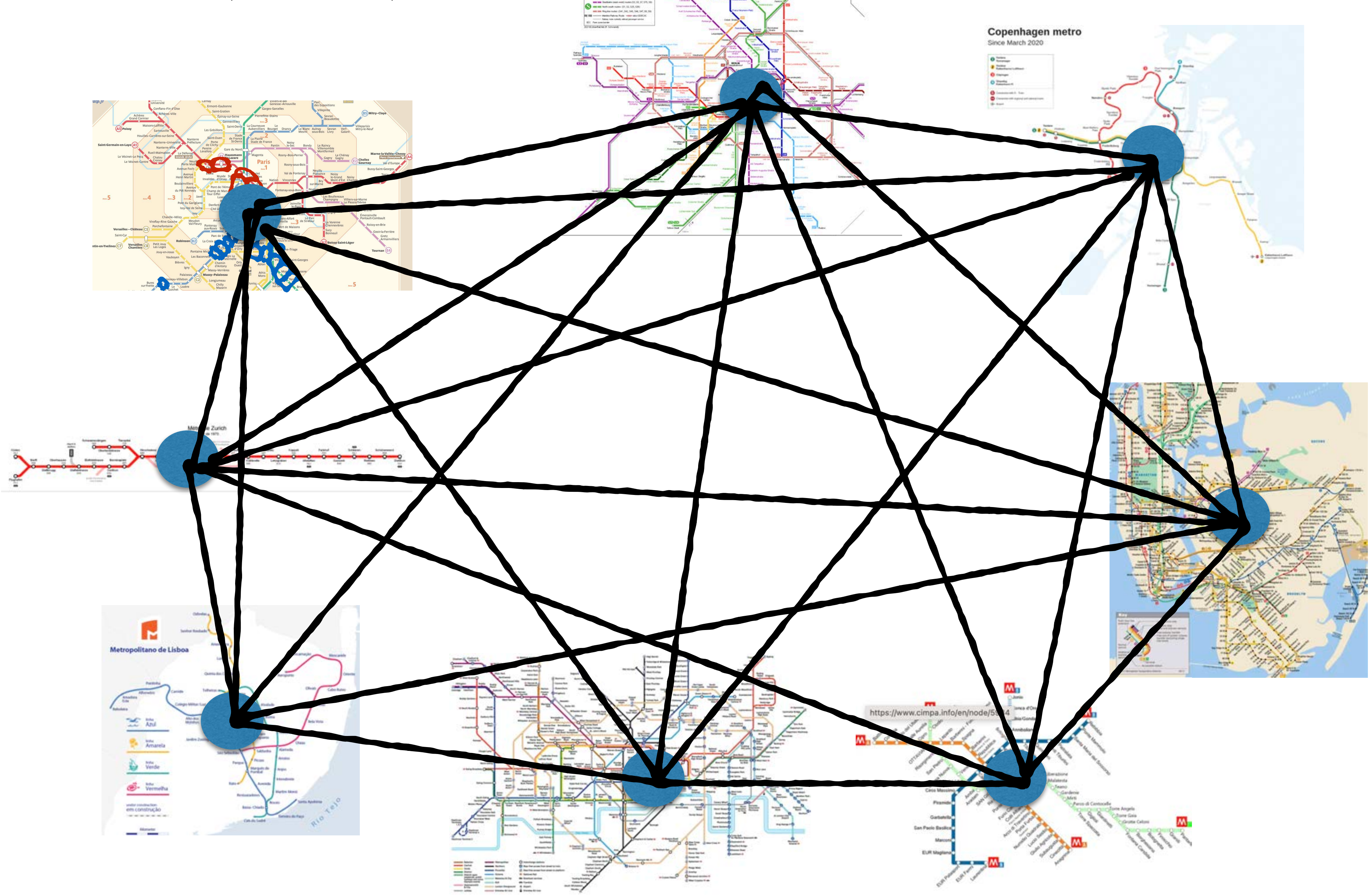


Déménagement virtuel des habitants de Paris vers Berlin (ou le contraire)

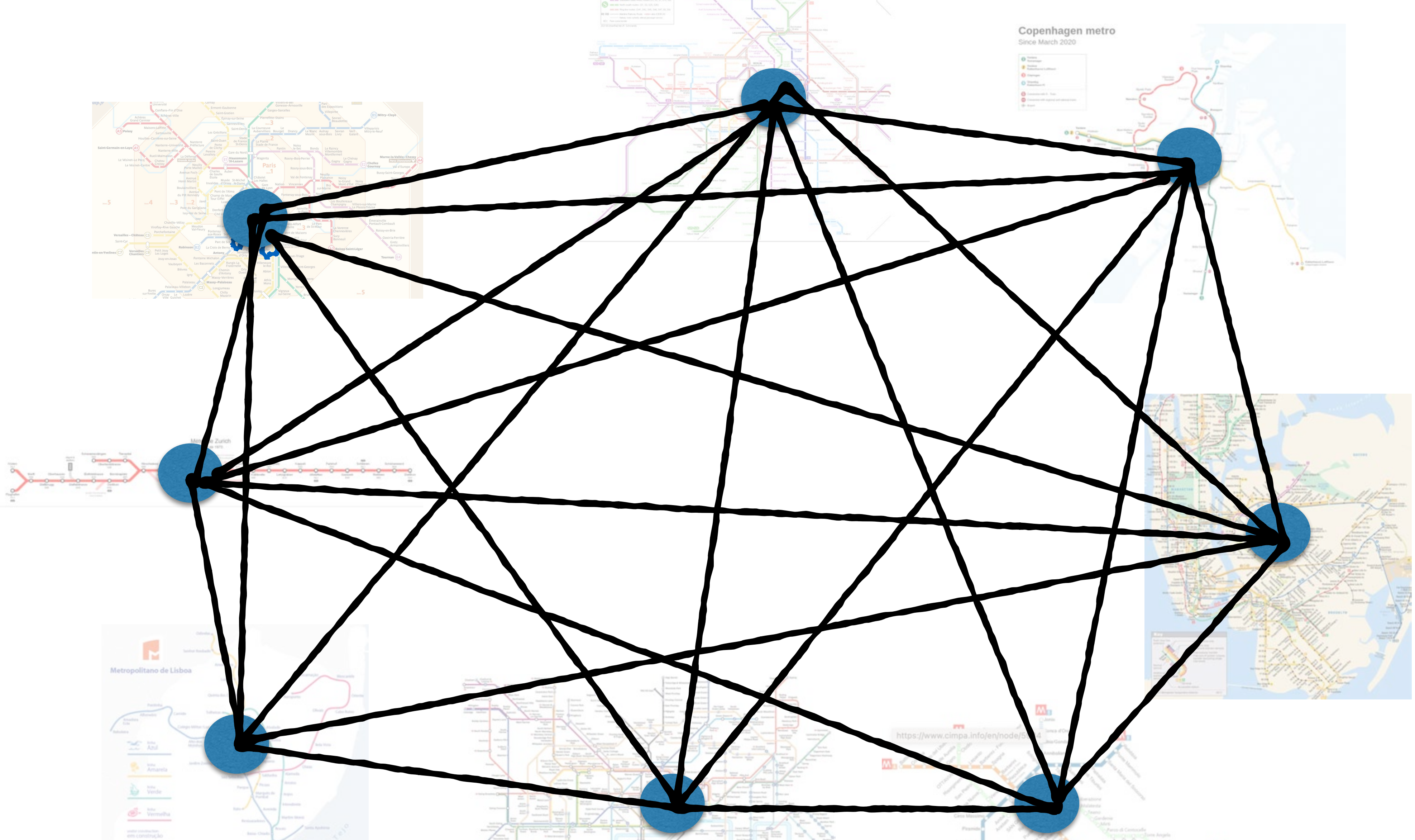
Plan de transports $$\Pi = \left\{ \gamma = (\gamma_{xx'}) \in \mathbb{R}_+^{N \times N'} \,,\; \sum_x \gamma_{xx'} = \mu'_{x'} \,,\; \sum_{x'} \gamma_{xx'} = \mu_x \right\}$$

$$d_{GW_p}(X, X') = \inf_{\gamma \in \Pi} \left(\sum_{xx'} \sum_{yy'} \left| d(x,y) - d(x',y') \right|^p \gamma_{xx'} \gamma_{yy'} \right)^{1/p}$$

Similarité (distance ?) entre zones urbaines



Similarité (distance ?) entre zones urbaines



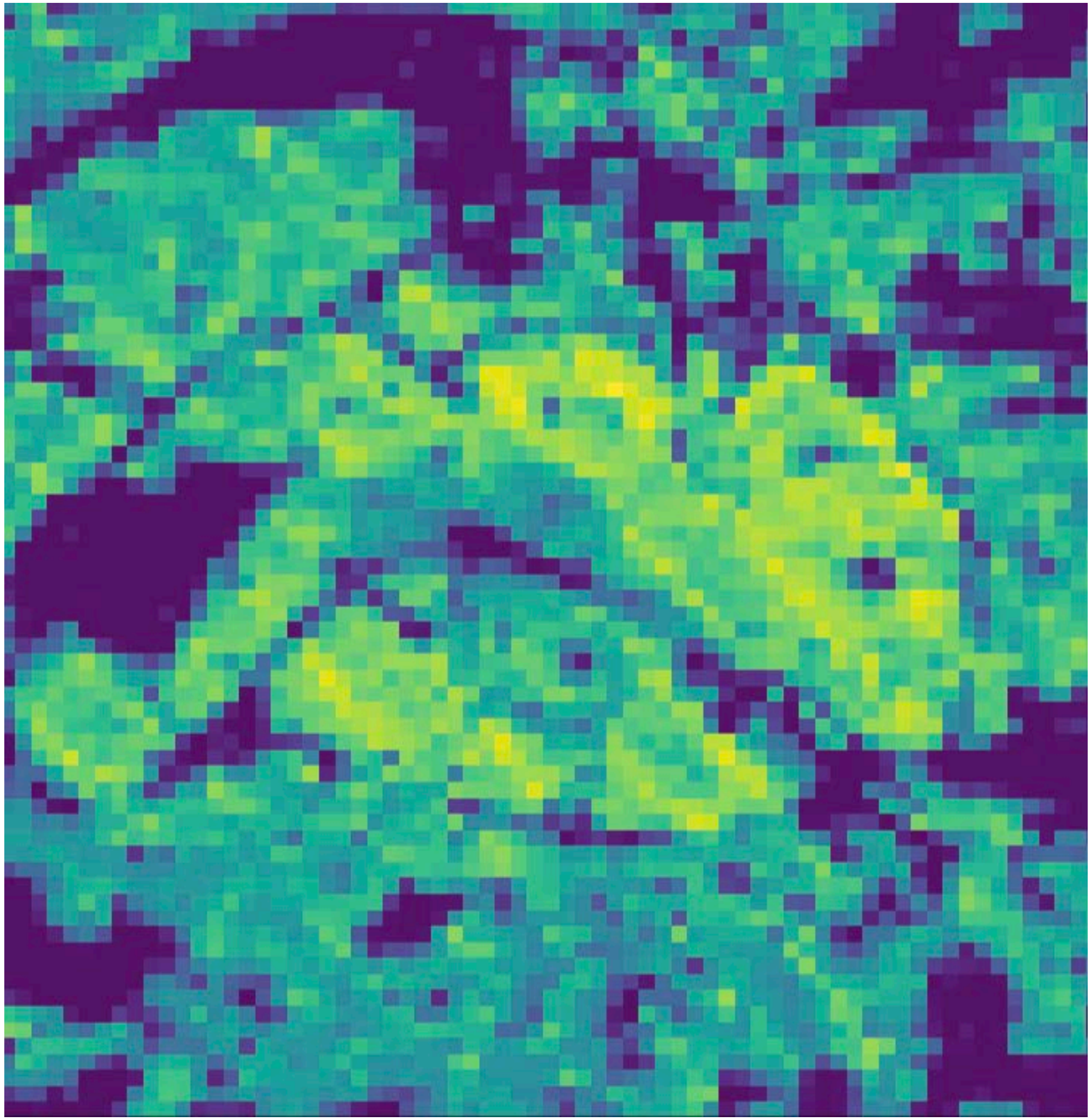
On peut concevoir un espace métrique, représenté ici par son graphe, dont chaque élément est une ville

Limites de l'approche

$$d_{GWp}(X, X') = \inf_{\gamma \in \Pi} \left(\sum_{xx'} \sum_{yy'} \left| d(x,y) - d(x',y') \right|^p \gamma_{xx'} \gamma_{yy'} \right)^{1/p}$$

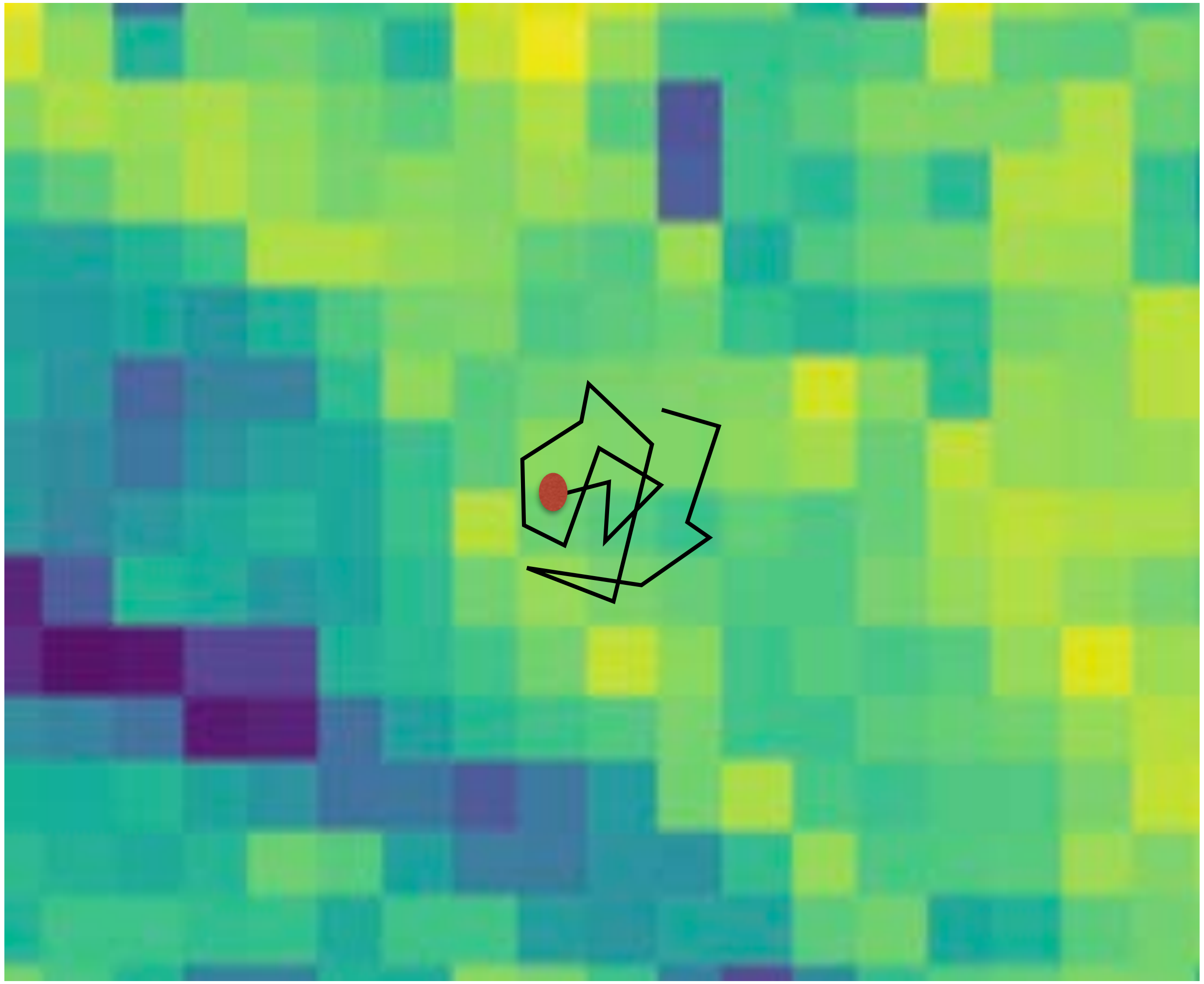
Cette distance ne se préoccupe pas de savoir si des personnes vont effectivement de x à y

Exploration de la notion de centralité



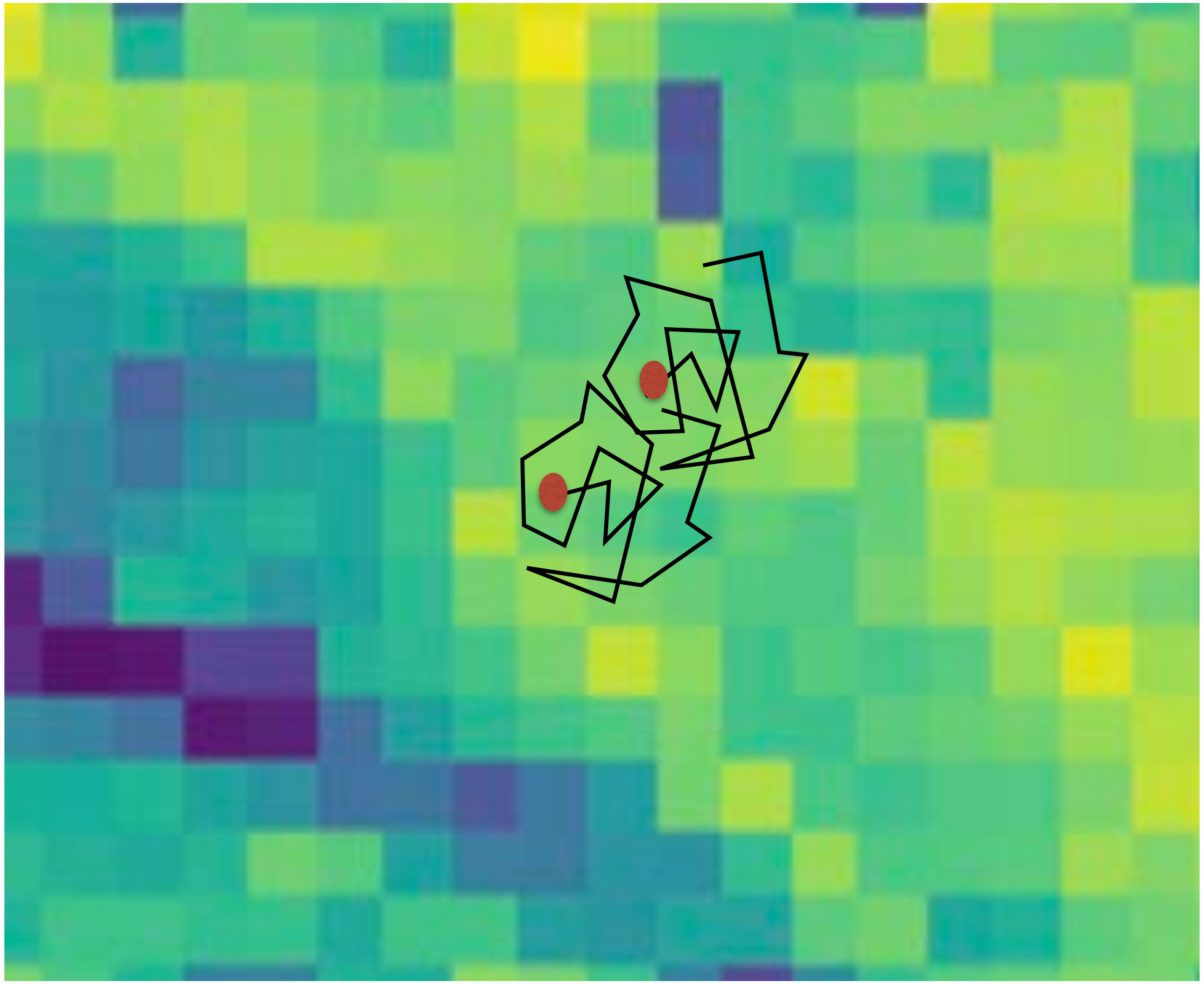
Modèle des avatars

On imagine que chaque personne émet des avatars d'elle-même qui se promènent aléatoirement autour de son lieu d'habitation



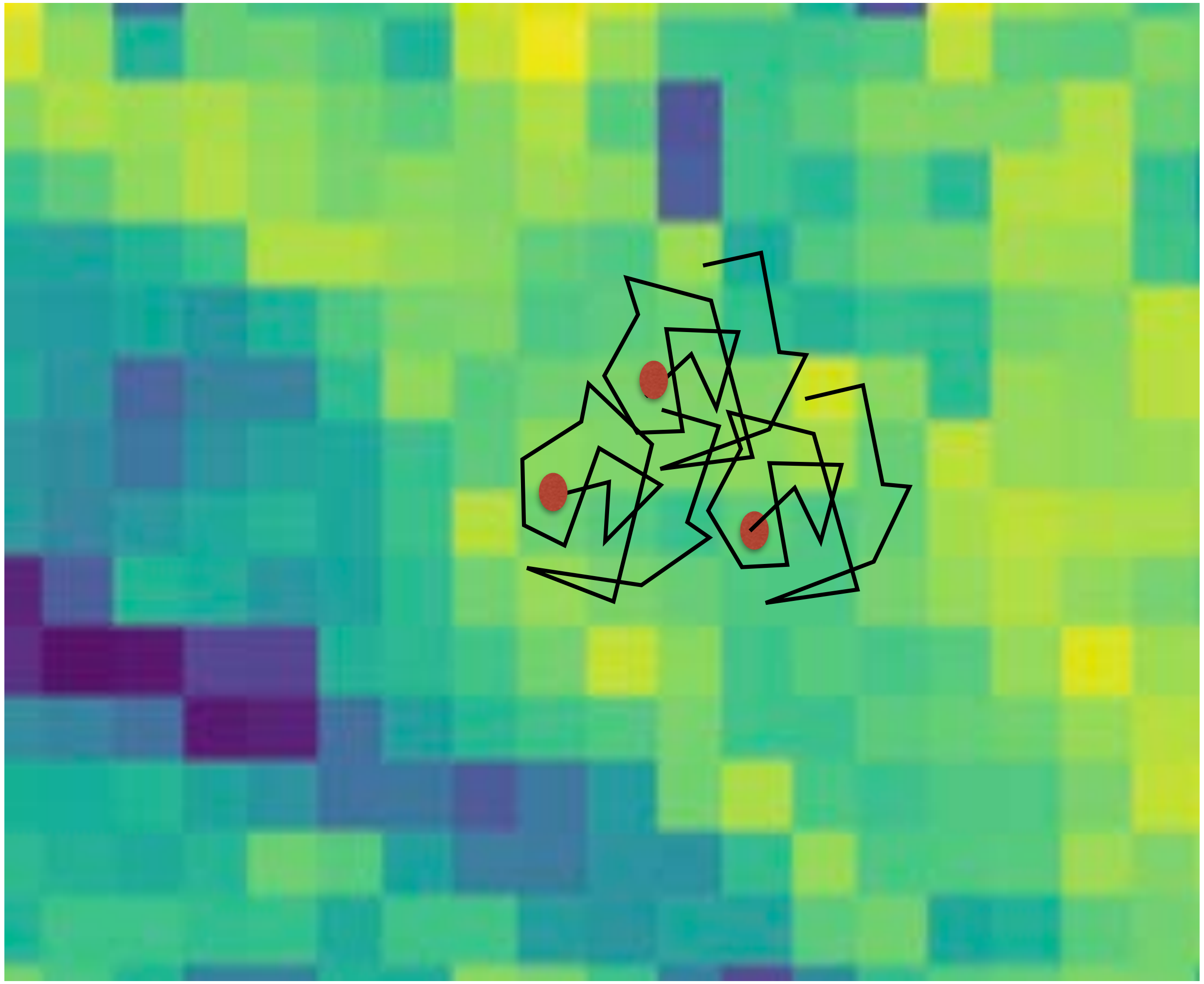
Modèle des avatars

On imagine que chaque personne émet des avatars d’elle-même qui se promènent aléatoirement autour de son lieu d’habitation



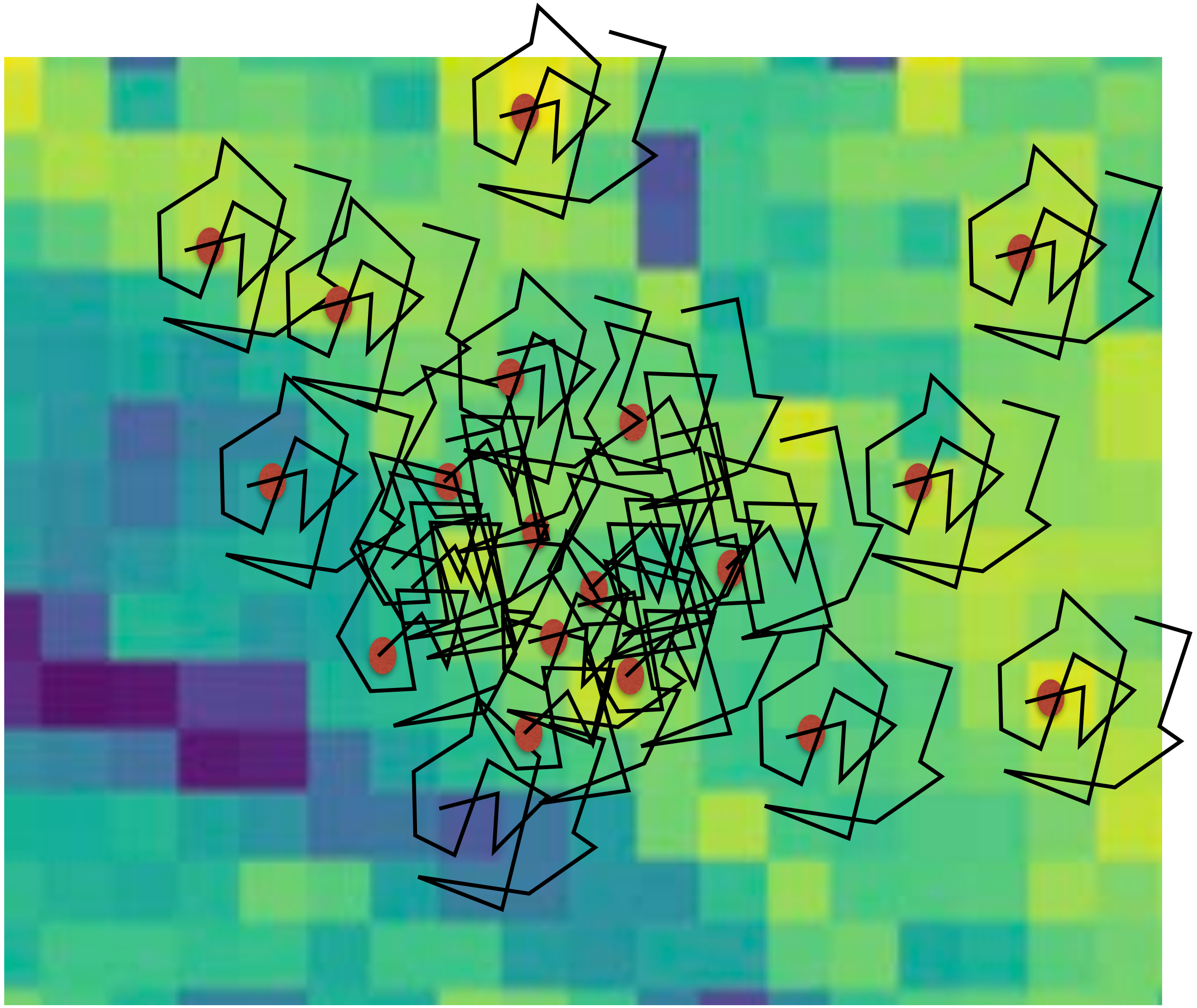
Modèle des avatars

On imagine que chaque personne émet des avatars d’elle-même qui se promènent aléatoirement autour de son lieu d’habitation



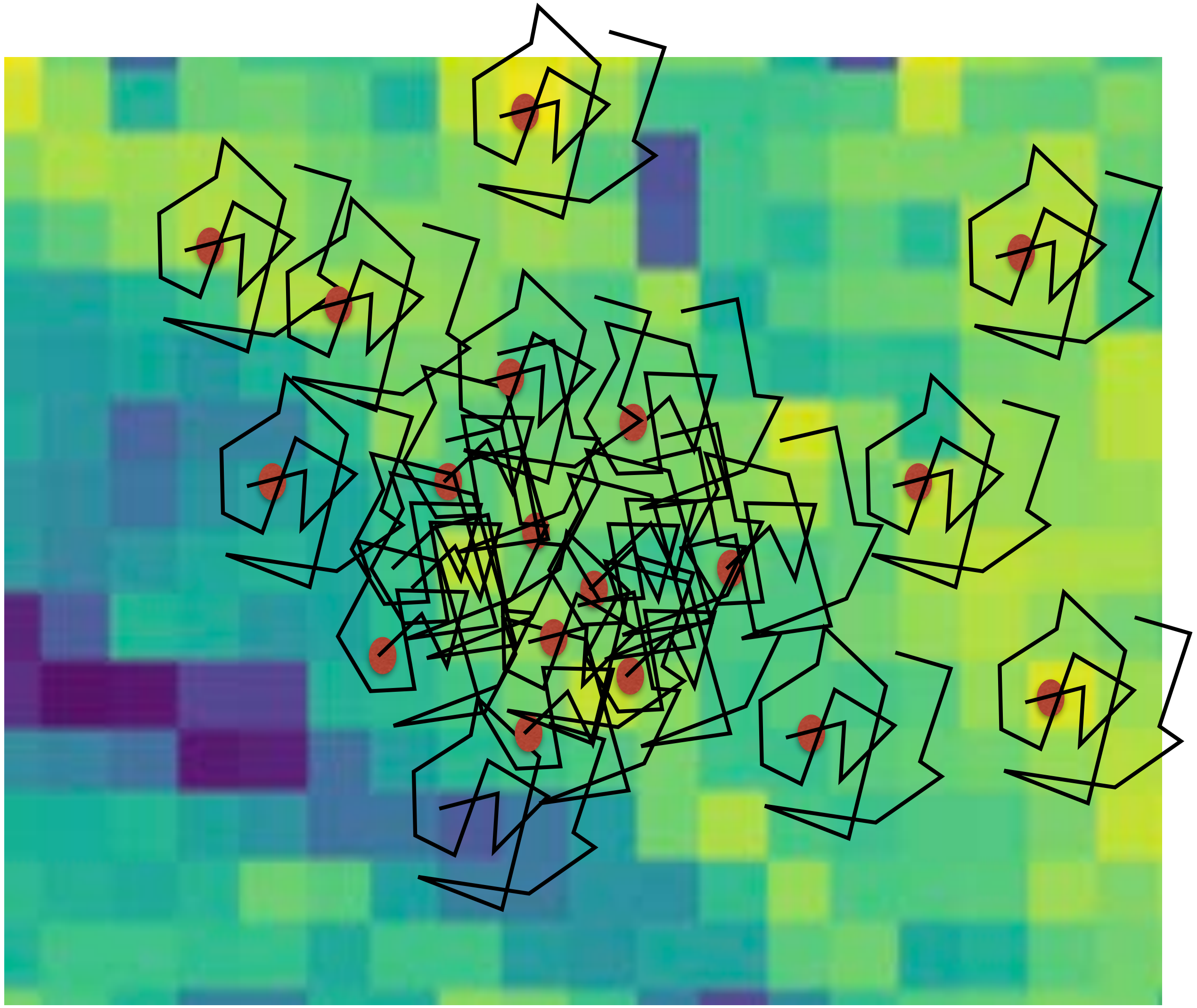
Modèle des avatars

On imagine que chaque personne émet des avatars d'elle-même qui se promènent aléatoirement autour de son lieu d'habitation



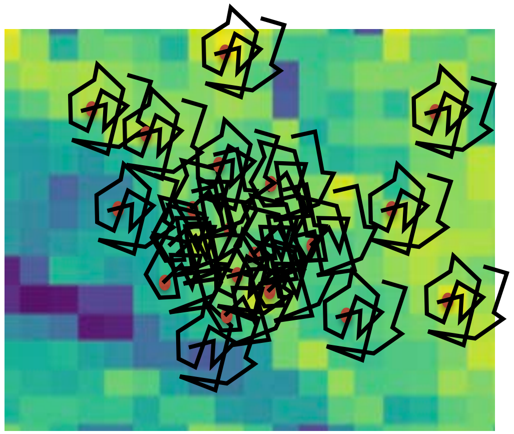
Modèle des avatars

On essai alors d'estimer l'intensité des rencontres entre ces avatars, qui représente une certaine probabilité de rencontre entre les habitants / promeneurs



Modèle des avatars

On essai alors d’estimer l’intensité des rencontres entre ces avatars, qui représente une certaine probabilité de rencontre entre les habitants

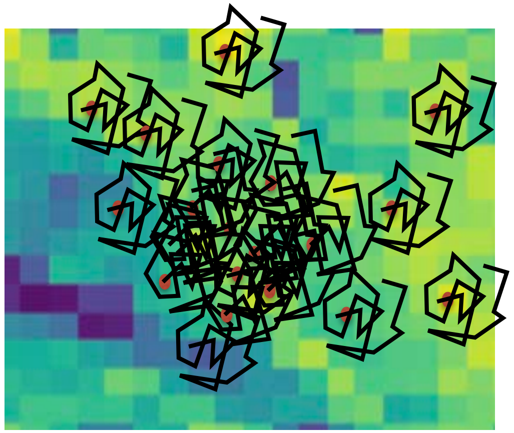


On peut écrire une équation aux dérivées partielles,
L’inconnue est u, qui représente la densité d’avatars

$$\partial_t u - D\Delta u = \beta\rho(x) - \gamma u,$$

Modèle des avatars

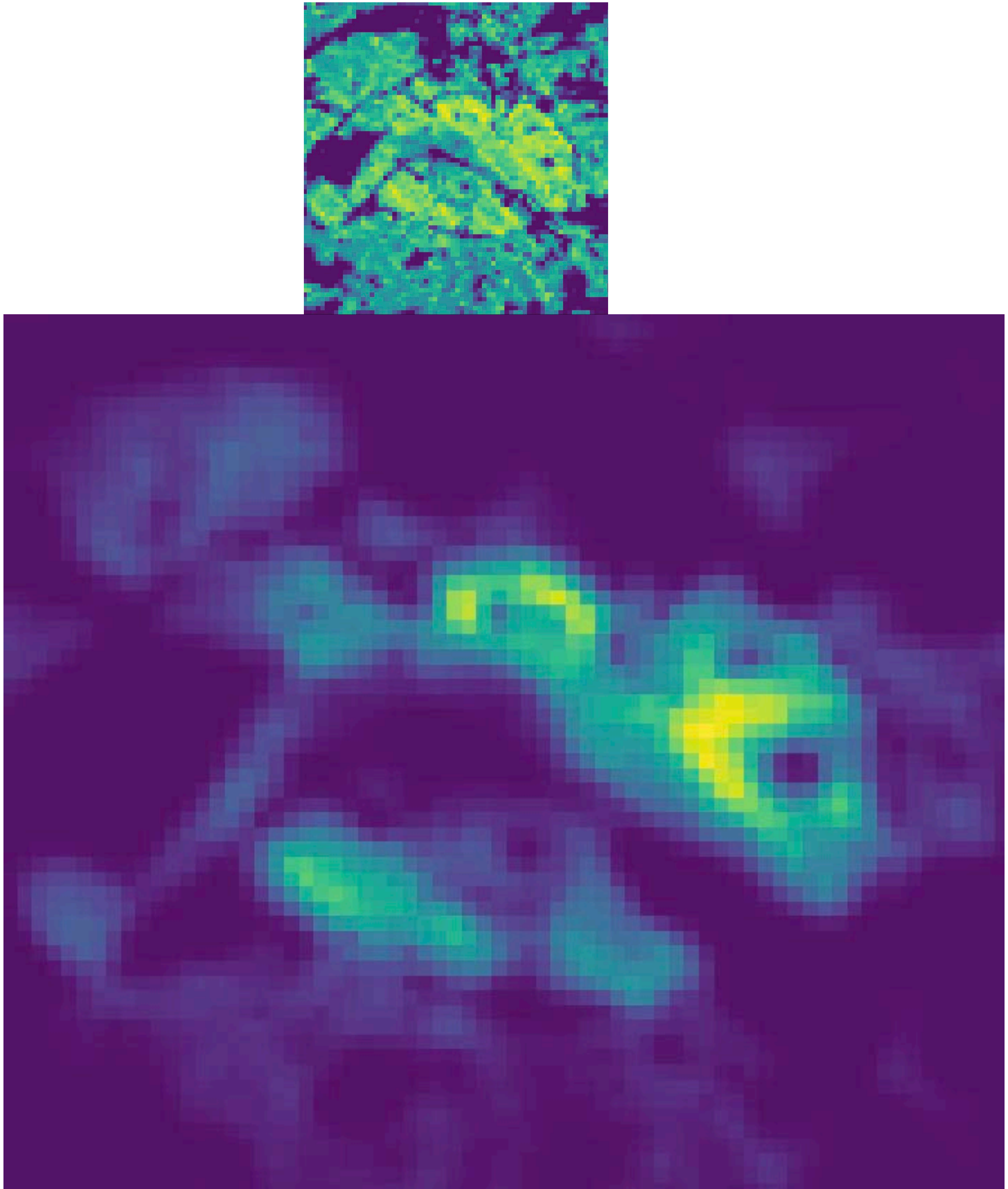
On essai alors d'estimer l'intensité des rencontres entre ces avatars, qui représente une certaine probabilité de rencontre entre les habitants

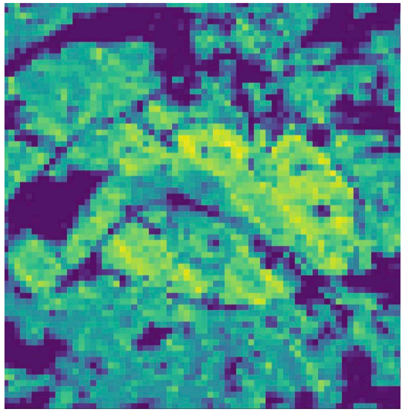


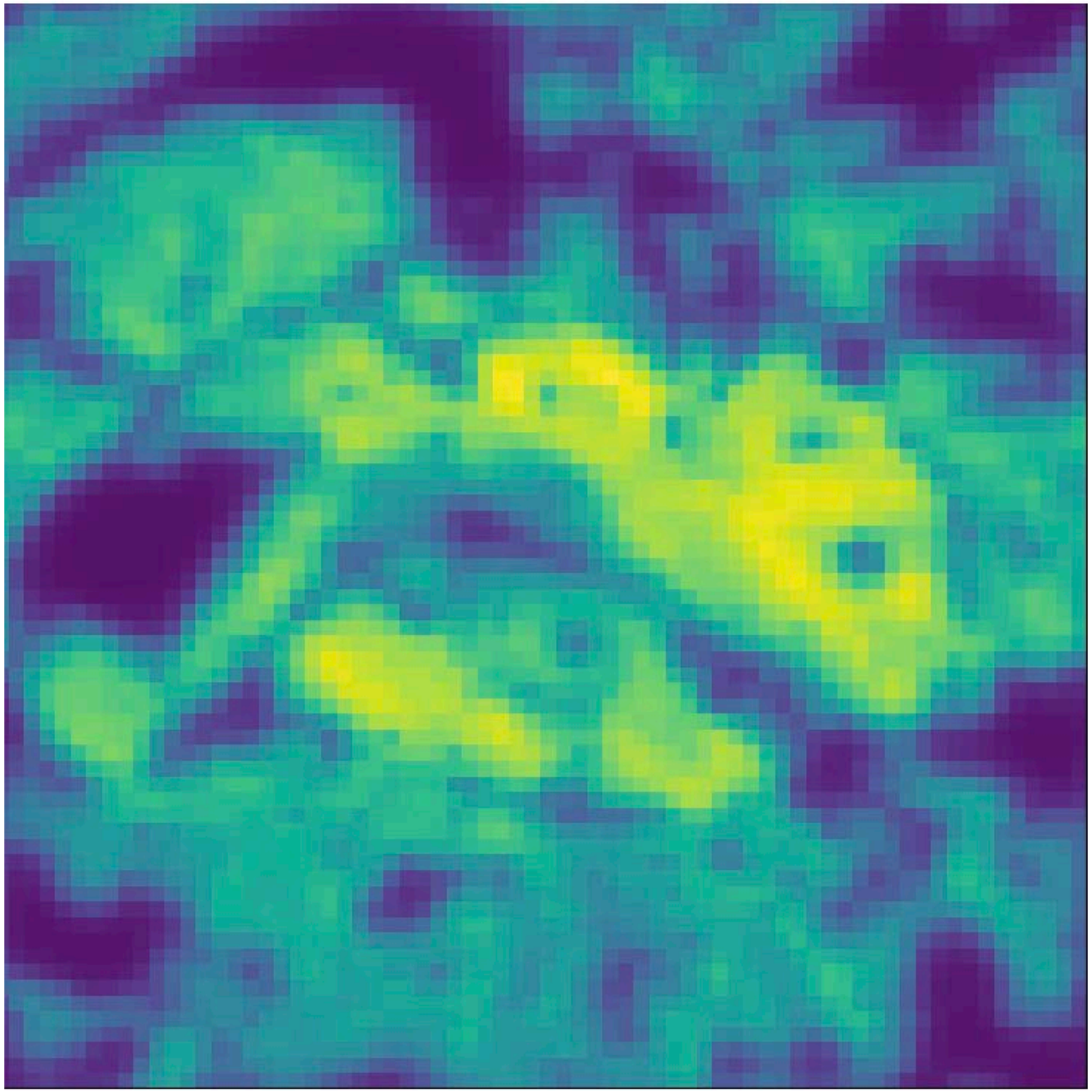
On peut écrire une équation aux dérivées partielles,
L'inconnue est u, qui représente la densité d'avatars

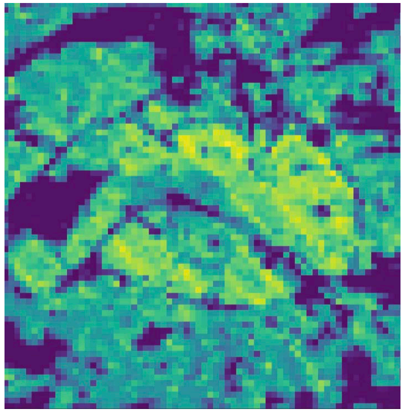
$$\partial_t u - D\Delta u = \beta\rho(x) - \gamma u,$$

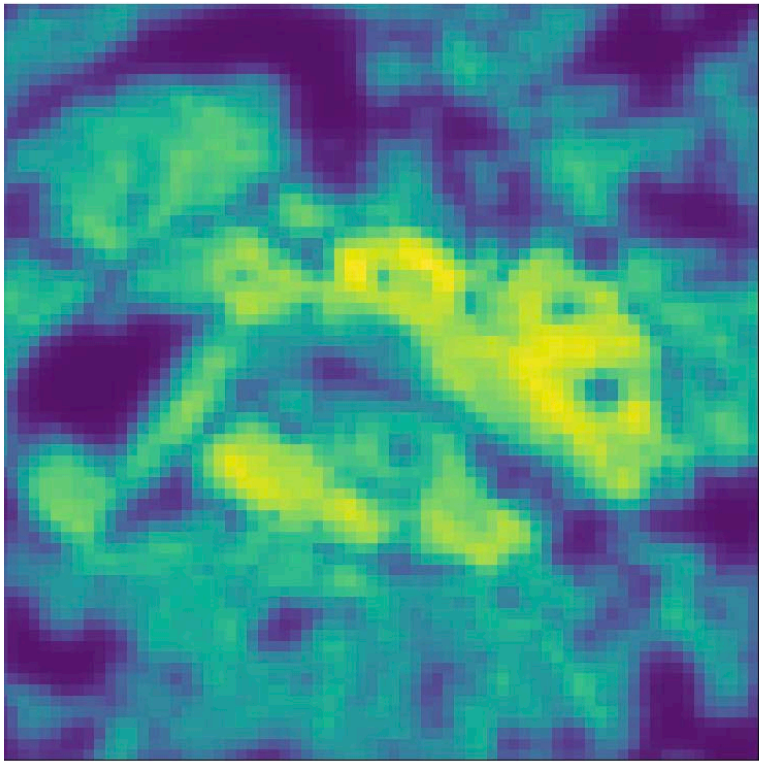
On représente alors u^2

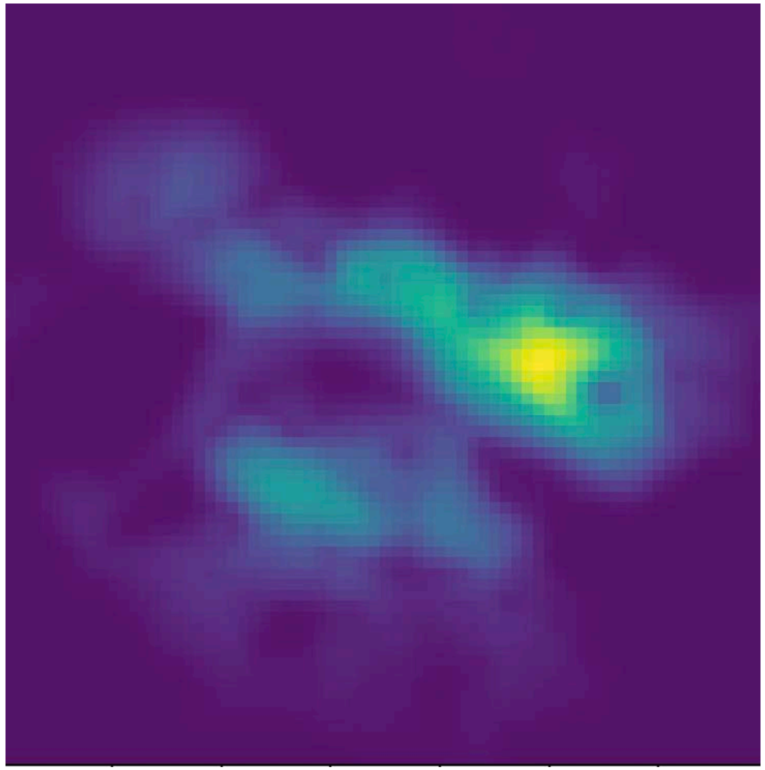




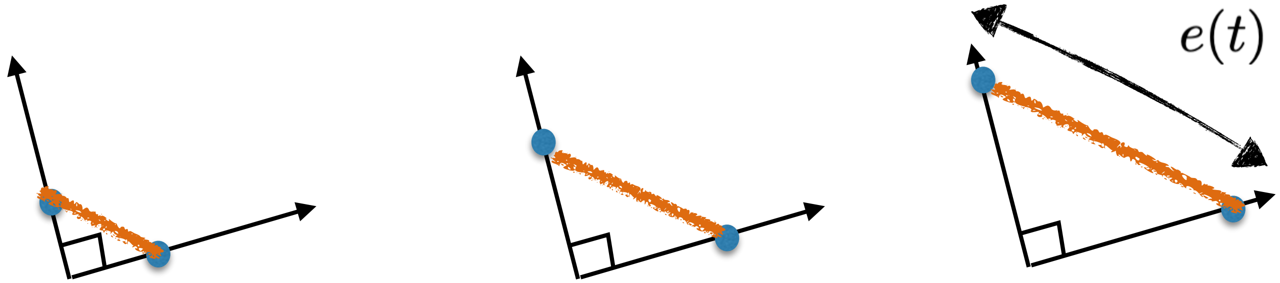




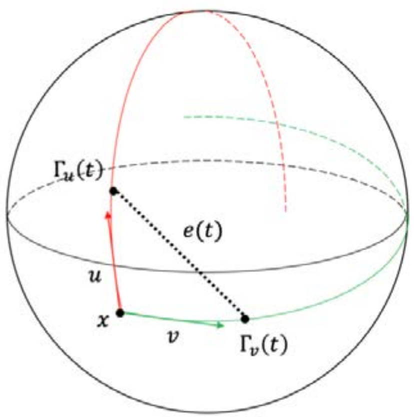


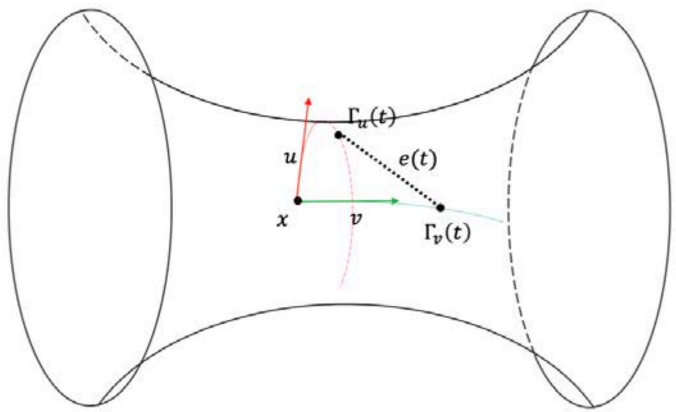


Géométrie des réseaux (ou autres):
la courbure de Ricci - Ollivier



$$e(t) = \sqrt{2}t$$





e(t) augmente **moins** vite que dans
le cas plat (euclidien):
Courbure **positive**

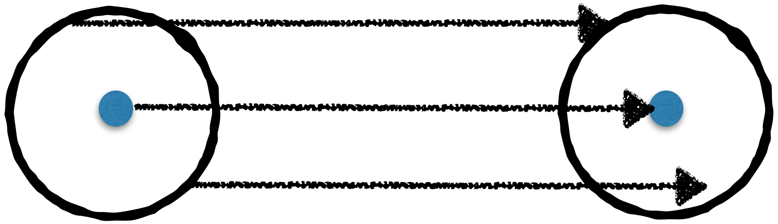
e(t) augmente **plus** vite que dans
le cas plat (euclidien):
Courbure **négative**

$$e(t) = \sqrt{2}\left(1 - \frac{\kappa}{12}t^2 + O(t^3)\right)$$

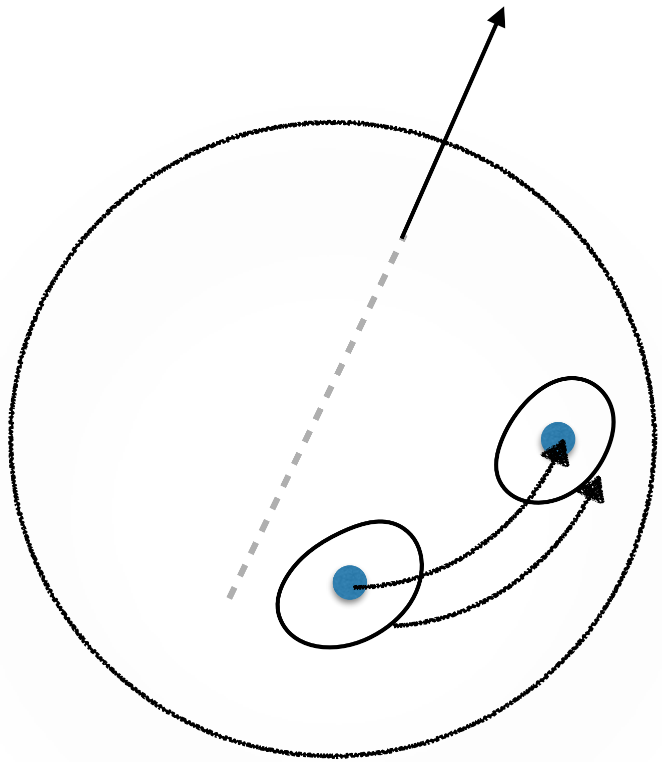
Autre interprétation

On distribue de la matière uniformément sur un cercle centré en x, et on la *transporte* vers le cercle centré en y.
Cela coûte-t-il plus cher en moyenne que d'aller de x à y ?

Si « plus cher » : courbure négative
Si « moins cher » : courbure positive



$$\kappa_{xy} = 1 - \frac{W_1(\rho_x, \rho_y)}{d(x,y)}$$



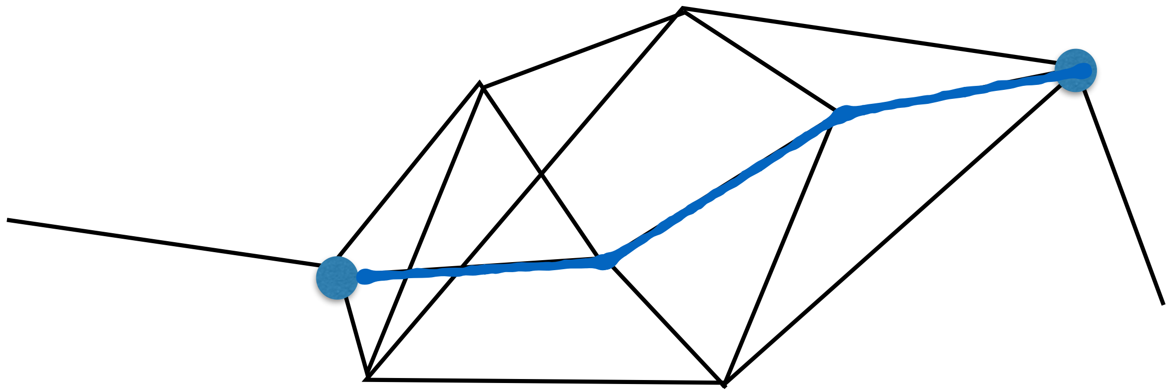
Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci

Parmi toutes les manières de transporter la masse des x_i vers les y_j, on cherche celle qui minimise la quantité

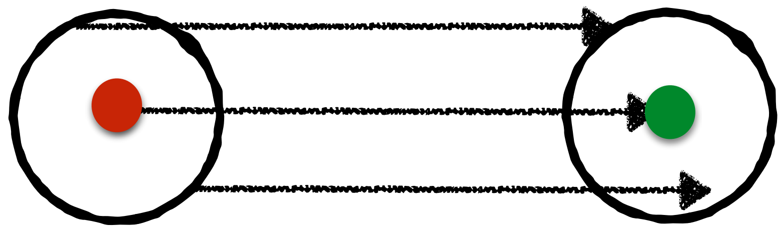
$$\sum_{ij} c_{ij}\gamma_{ij}$$

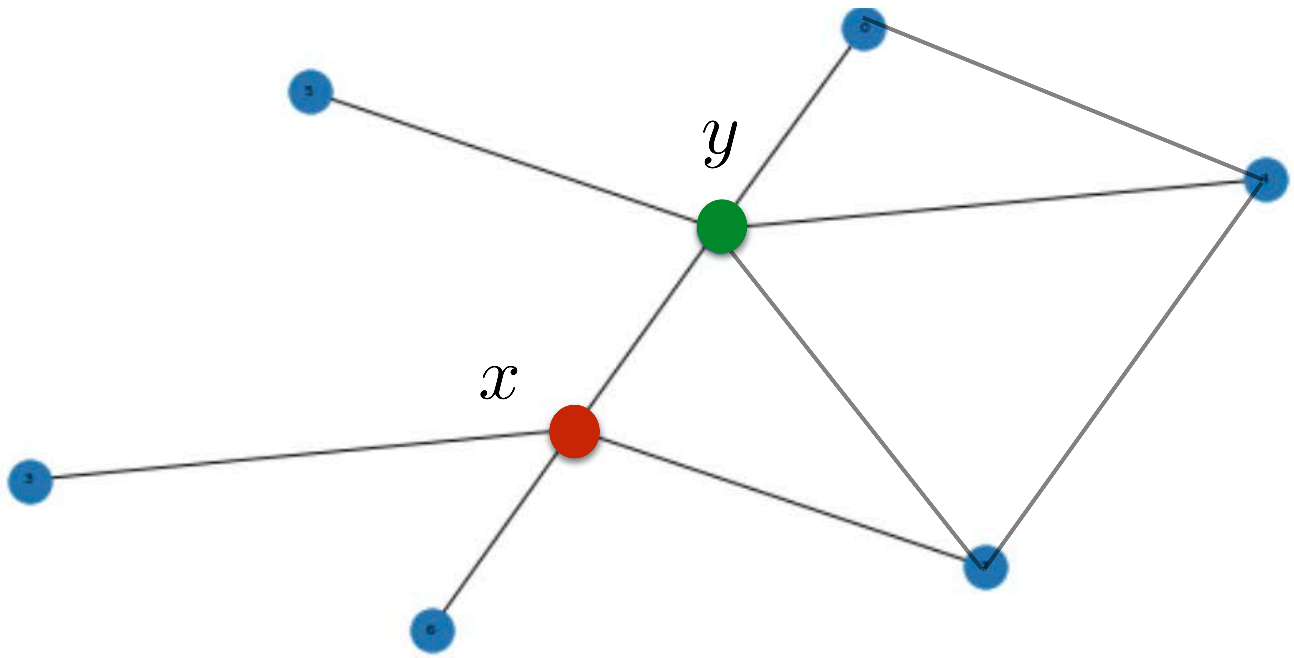
Distance entre les deux distributions : $$W_1(\mu,\nu) = \min_{\gamma} \sum_{ij} c_{ij}\gamma_{ij}$$

Sur un graphe, le coût pour aller d'un point à l'autre est la longueur du plus court chemin au travers du graphe

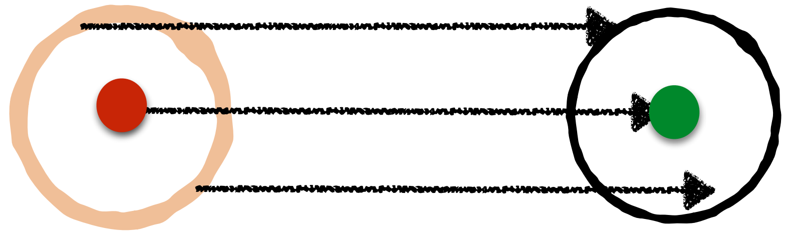


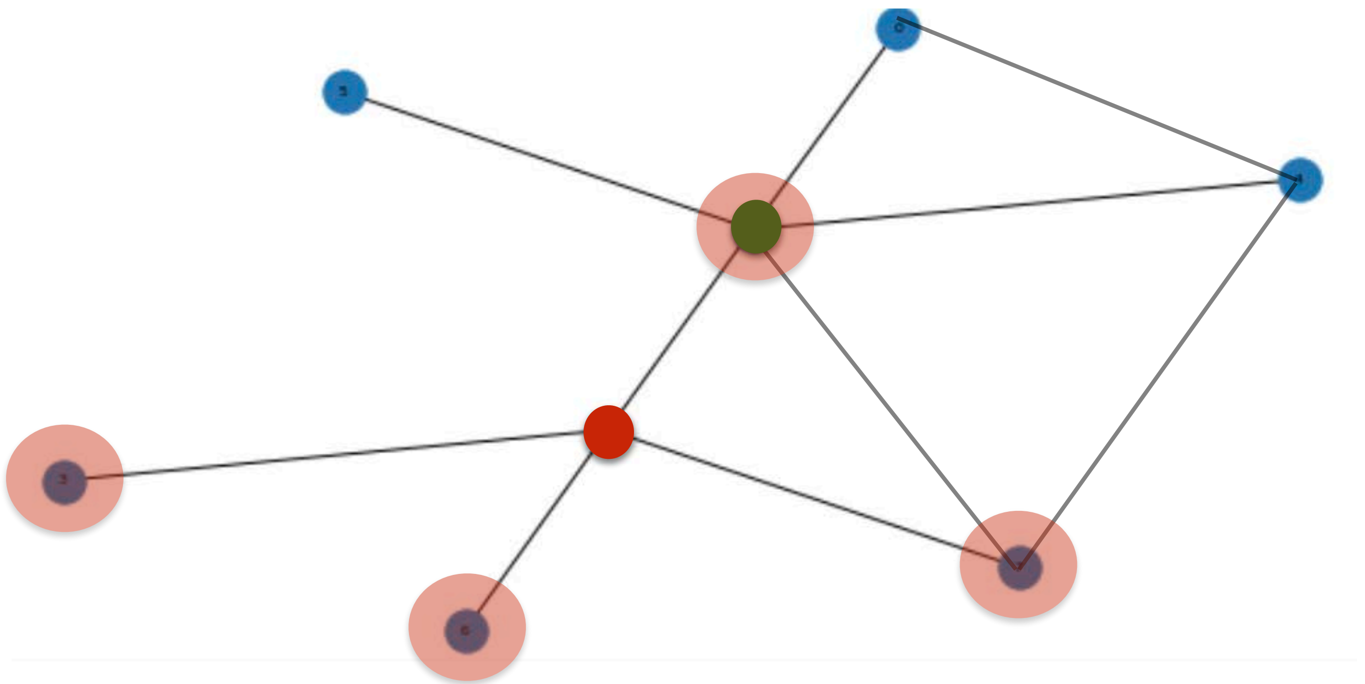
Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci



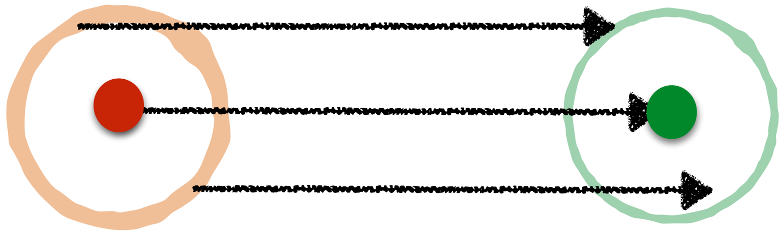


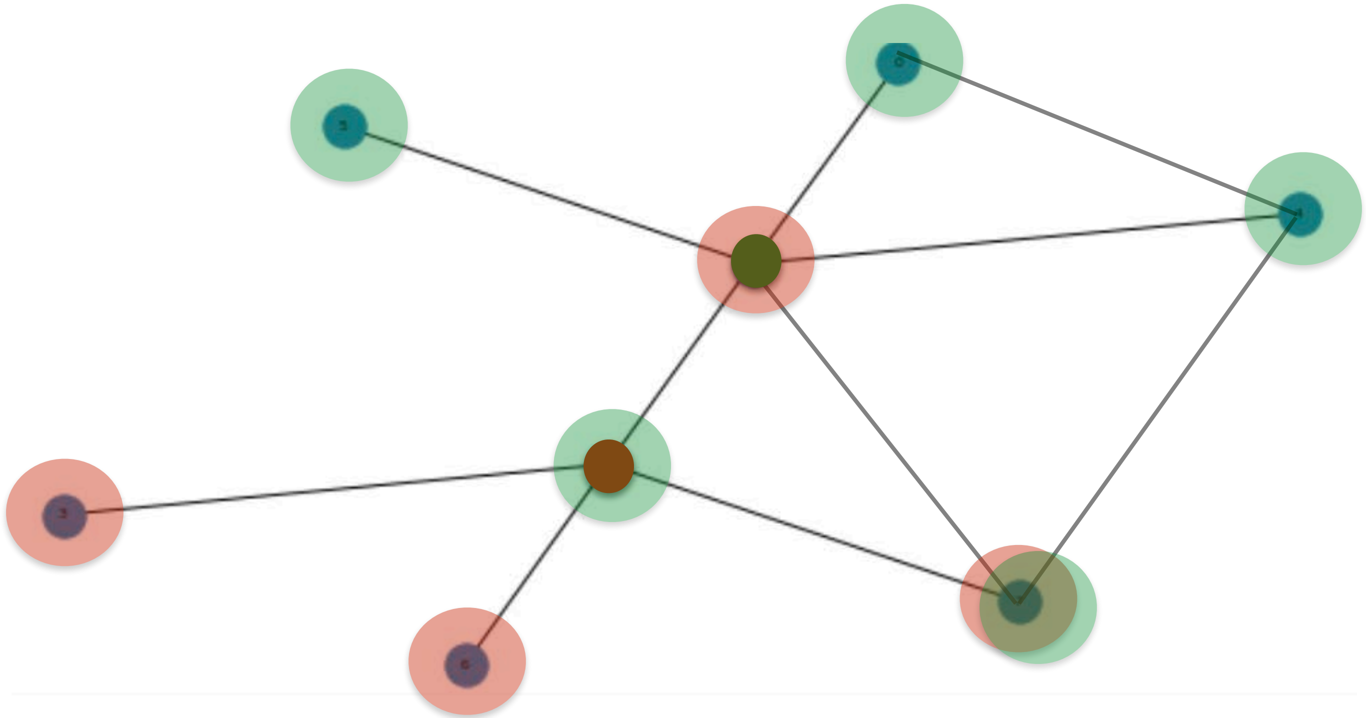
Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci



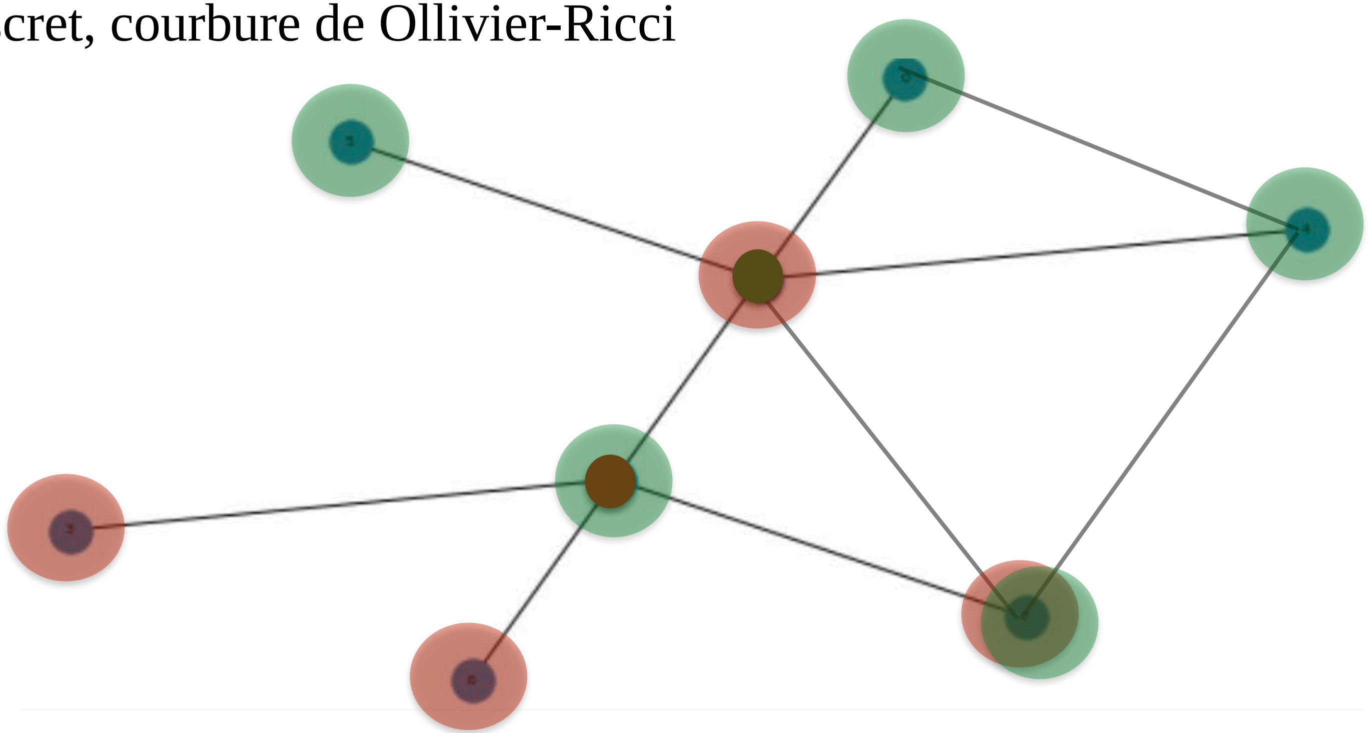


Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci



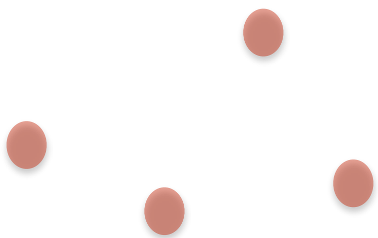


Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci

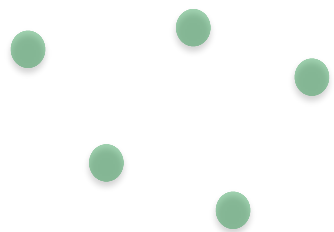


On transporte

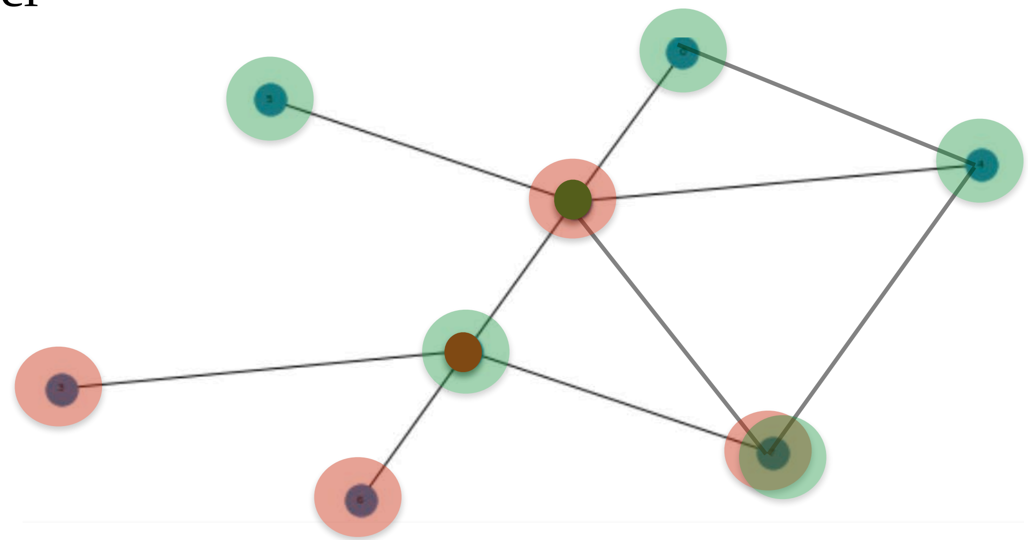
μ



vers ν



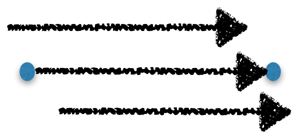
Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci



On définit

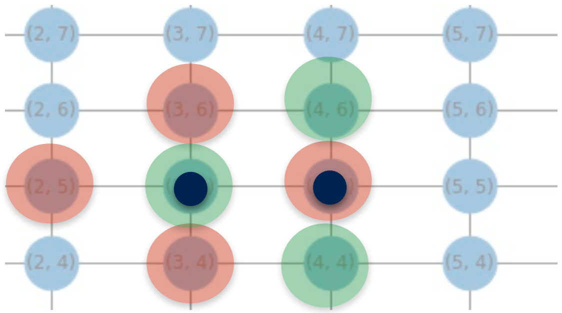
$$\kappa = 1 - \frac{W_1(\mu,\nu)}{d(x,y)}$$

(Y. Ollivier, 2007)

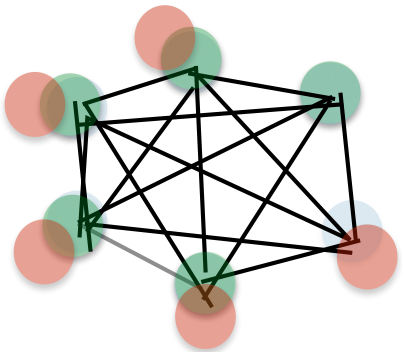


On retrouve l'idée de départ, exprimée ici :
je suis *x*, si les personnes de mon « premier cercle » sont en moyenne *plus* proches des personnes du premier cercle de *y* que je ne le suis de *y* moi-même, la courbure est *positive*

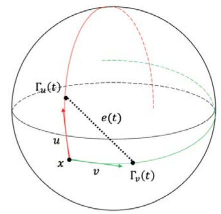
Exemples pour des graphes simples

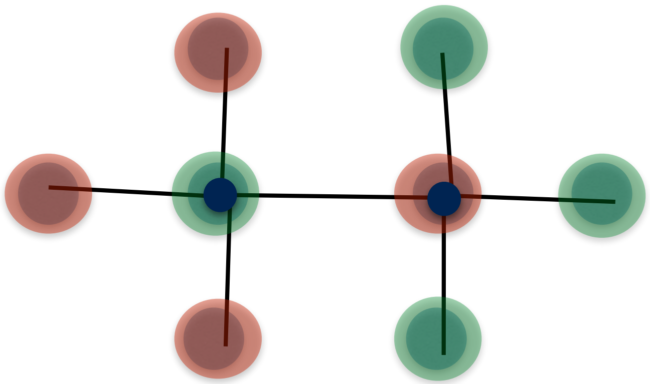


Réseau cartésien : plat $(\kappa = 0)$

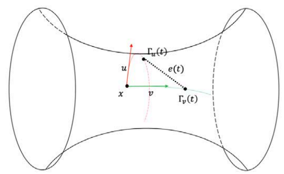


Graphe complet à N sommets $\kappa = 1 - \dfrac{1}{N-1} > 0$





Ambassadeurs $\kappa = -1 < 0$



Cadre discret, courbure de Ollivier-Ricci

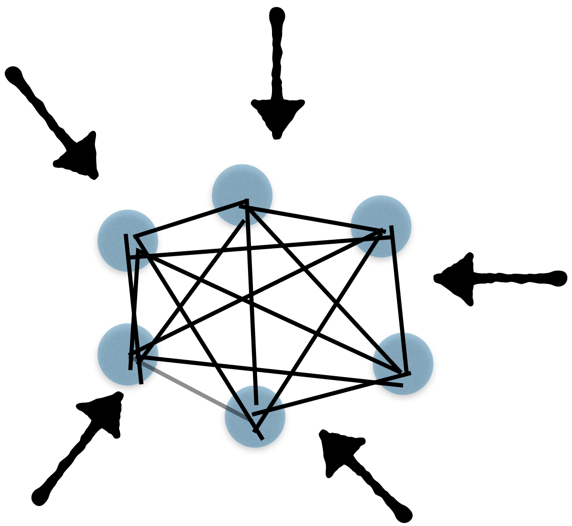
Courbure **négative**
lien privilégié, entre des personnes potentiellement éloignées culturellement
x et y sont les *ambassadeurs* de leurs communautés respectives vis à vis de l’autre communauté,
La cohésion de la communauté globale repose sur ces liens de courbure négative
S’ils cèdent : émiettement de la communauté en sous-communautés

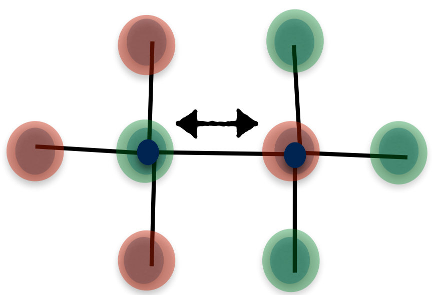
Courbure **positive**
Lien entre personnes d’une même communauté.

Flot de Ricci
(N.B. : Utilisé dans le cadre continu par Perelman pour démontrer
la conjecture de Poincaré)

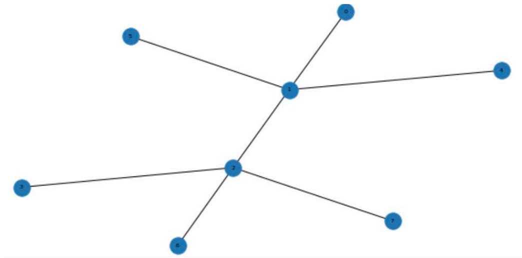
On fait évoluer les longueurs des arêtes selon l'équation

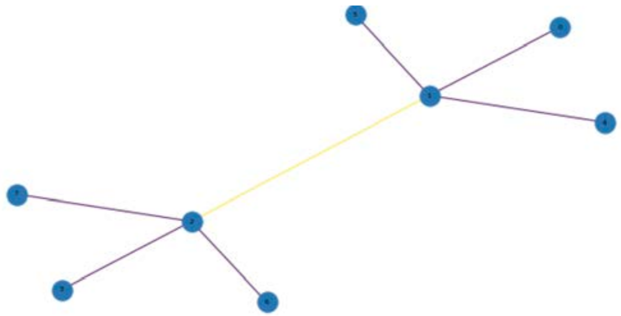
$$\frac{dR_{xy}}{dt} = -\kappa_{xy} R_{xy}$$

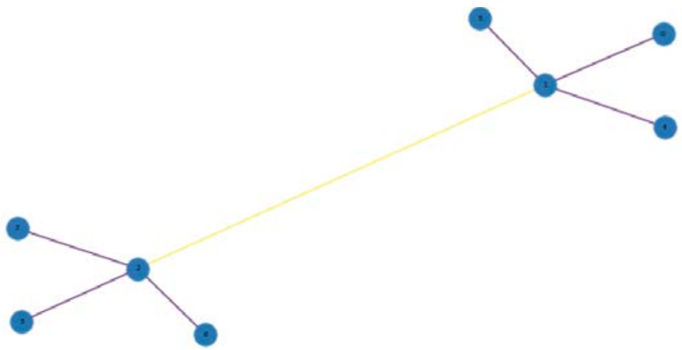




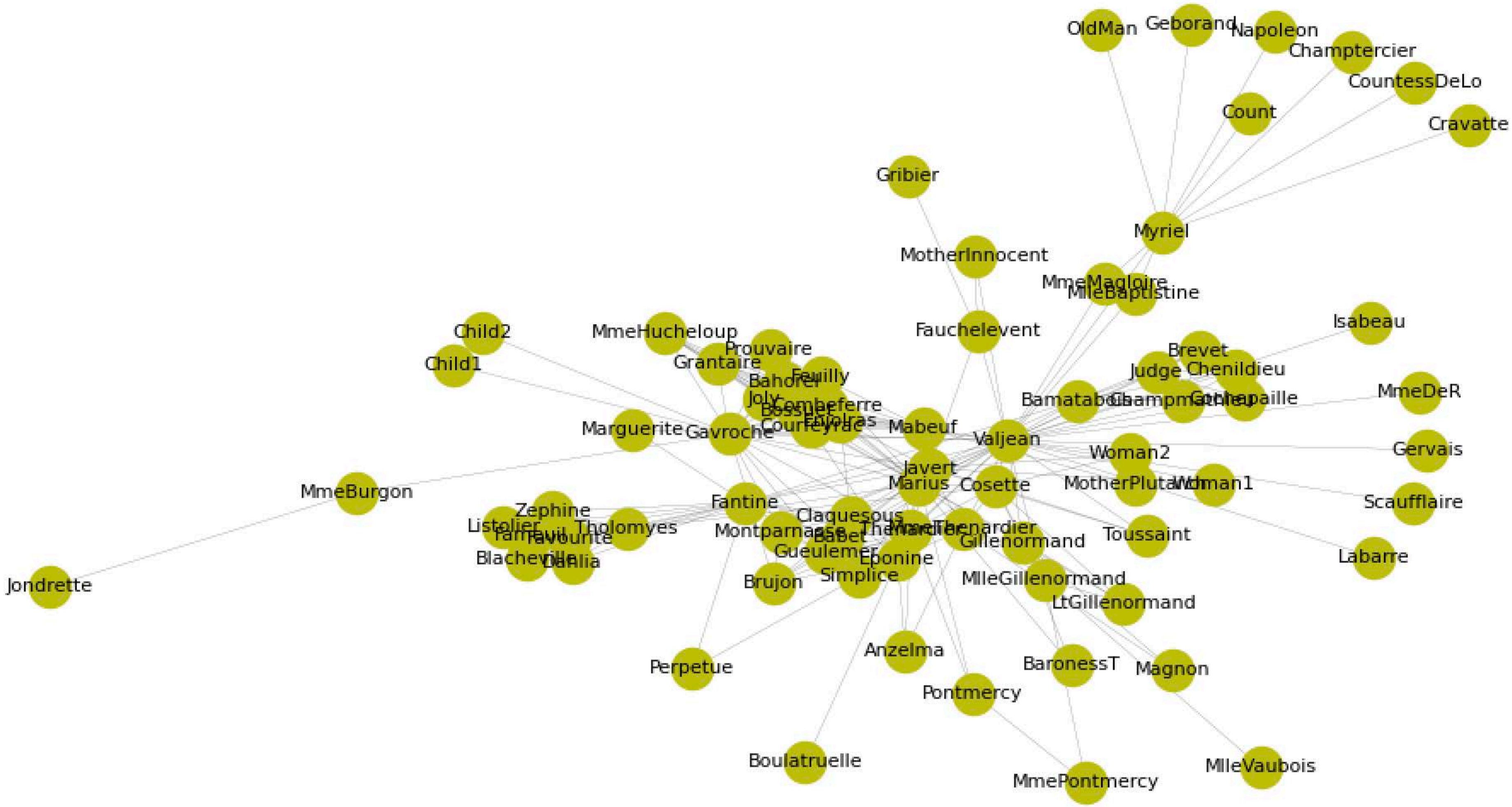
Flot de Ricci : distend les liens à courbure négative







Sous-communautés pour les personnages des Misérables



Sous-communautés pour les personnages des Misérables